

1° Démontrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = f''(0) f(x).$$

2° Déterminer explicitement les solutions f de (C) vérifiant (i) et (ii).

B. On considère les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(T) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x-y) = f(x) f(y) + g(x) g(y)$$

1° Montrer que f est paire.

2° On suppose f non constante.

a. Démontrer que g n'est pas paire et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad g(-x) g(-y) = g(x) g(y)$$

En déduire que g est impaire.

b. Calculer $f(0)$, ainsi que $(f(x))^2 + (g(x))^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c. Montrer enfin que f vérifie la relation (C).

3° Déterminer les solutions f et g de (T) avec f vérifiant (i) et (ii).

C. On considère les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(A) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) g(y)$$

On suppose f non identiquement nul et g non constant.

1° Calculer $g(0)$, montrer que g est paire et vérifie (C).

2° On suppose f paire.

Quelle relation existe-t-il alors entre f et g ?

3° On suppose f impaire.

Montrer que si $f(r) = 0$ alors $f(x+2r) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $g(2r) = 1$.

Que peut-on dire d'une application $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x+y) + \tilde{f}(x-y) = 2\tilde{f}(x) g(y)$$

4° Déterminer explicitement f et g lorsque g vérifie (i) et (ii).

FIN