

I.

1°) On intègre par rapport à y la relation : $f(x+y) + g(x-y) = h(x) + k(y)$ et on trouve : $F(x+y) - F(x) - G(x-y) + G(x) = K(y) + y h(x)$ (6)

2°) si $y \neq 0$, on peut exprimer $h(x)$ en fonction de F, G et K qui sont continues. En intégrant par rapport à x , on trouverait une relation semblable qui nous permettrait de conclure que h est continue. Puis, en posant $X = x+y, Y = x-y$ on peut écrire :

$$f(X) + g(Y) = h_1(X+Y) + h_2(X-Y) \text{ où } h_1(X+Y) = h\left(\frac{X+Y}{2}\right) \text{ et } h_2(X-Y) = h\left(\frac{X-Y}{2}\right). \quad h_1 \text{ et } h_2 \text{ sont continues.} \quad (7)$$

De la relation établie ci-dessus, on en déduit que f et g sont continues. Conclusion, F, G, K et H sont dérivables. Donc, h puis h_1 et h_2 sont dérivables. On démontre que h, h_1 et h_2 sont indéfiniment dérivables par une récurrence très simple.

3°) En dérivant une fois / x et une fois / y la relation du début, on trouve : $f''(x+y) = g''(x-y) \Rightarrow f''(x+y) = g''(x-y) \quad (/x)$
et $f''(x+y) = g''(x-y) \quad (/y)$

donc, $f''' = g''' = 0$: f et g sont des polynômes de degré ≤ 2 (4)
de même pour h et k .

II.

A) 1°) $f(0,0) = 0$ (!) (1)

2°) a) Soit $\vec{v}_1$ un vecteur $\neq 0 \perp \vec{u}$, on pose $\vec{v}_2 = \alpha \vec{u} - \vec{v}_1$, où $\alpha = \frac{\vec{v}_1^2}{\vec{u}^2}$ (5)
($\vec{u} \neq 0$), alors, on a bien : $\lambda > 1, \lambda \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 \cdot (\vec{u} + \vec{v}_1) = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$.

$$b) f(\lambda u) = f(u + v_1 + v_2) = f(u) + f(v_1) + f(v_2) \geq f(u) \quad (2)$$

3°) On sait que si $\lambda > 1 : \varphi(\lambda x) \geq \varphi(x)$, donc, pour $x > 0$,

φ est monotone croissante (donc localement intégrable) et pour $x < 0$, φ est monotone décroissante (de même pour ψ) (3)

$$b) f(x, -y) = f((x, 0) + (0, y)) = \varphi(x) + \psi(-y)$$

$$f(y, x) = \varphi(y) + \psi(x)$$

$$\text{Or : } (x, -y) \cdot (y, x) = 0 \Rightarrow f(x+y, x-y) = f(x, -y) + f(y, x)$$

$$\text{donc : } \varphi(x+y) + \psi(x-y) = \varphi(x) + \psi(x) + \varphi(y) + \psi(-y) \quad (3)$$

Conclusion, grâce au I, φ et ψ sont des polynômes du 2° degré.

$$4°) \varphi(0) = 0 \text{ et } \forall x, \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) = ax^2, \text{ de même } (4)$$

$$\psi(x) = ax^2 \text{ et en écrivant la relation ci-dessus, on trouve } a = a \geq 0.$$

$$B) \text{ On se ramène au cas } n=2 \text{ en posant } g(x, y) = f(x, y, 0, \dots, 0). \Rightarrow \varphi(x) = \psi(x) = ax^2 \text{ et de même, } f(0, \dots, x_i, \dots, 0) = ax_i^2 \text{ c.q.f.d.} \quad (6)$$