

III.

A) 1°) on intègre / y : $F(x+y) - F(x-y) = 2f(x).f(y)$, puis, on choisit y tel que $F(y) \neq 0$; on en déduit que f est continue, donc f dérivable et par récurrence, f indéfiniment dérivable. $\leftarrow (5)$

On dérive (C) 2 fois / y $\Rightarrow f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x).f''(y)$ $\leftarrow (3)$
et on remplace y par 0. (on remarque aussi que $f(0)=1$)

2°). 3 cas : $f''(0)=0 \Rightarrow f(x)=ax+b$ et (C) $\Rightarrow a=0, b=0$ ou $b=1$ et $a=0 \Rightarrow b=1$ donc : $f=1$. $\leftarrow (2)$

$f''(0) > 0$. $f''(0)=\alpha^2 \Rightarrow f(x)=\lambda \cosh \alpha x + \mu \sinh \alpha x$.

$f(0)=1 \Rightarrow \lambda=1$, puis en remplaçant dans (C) :

$$\Rightarrow \mu [\sinh \alpha(x+y) + \sinh \alpha(x-y)] = \mu [2\mu \sinh \alpha x \sinh \alpha y + 2 \sinh \alpha(x+y)]$$

$$x=0 \Rightarrow 0 = \mu \cdot 2 \sinh y \quad (\forall y) \Rightarrow \mu=0.$$

$$\text{donc : } f(x) = \cosh \alpha x \quad \leftarrow (2)$$

$f''(0) < 0$: $f''(0)=-\alpha^2$, de même, on trouve :

$$f(x) = \cosh \alpha x \quad \leftarrow (2)$$

B) 1°) on a évidemment : $f(x-y)=f(y-x) \Rightarrow f$ paire. $\leftarrow (3)$

$$2^\circ). a) f(-x - (-y)) = f(x-y) = f(x)f(y) + g(-x).g(-y) = f(x).f(y) + g(x).g(y)$$

$$\Rightarrow g(-x).g(-y) = g(x).g(y) \quad \leftarrow (1)$$

si g était paire : $\forall x : g(-x)=g(x) \Rightarrow f(2x)=f(x).f(-x) + g(x).g(-x) = f^2(x) + g^2(x) = f(0) \Rightarrow f$ constante : impossible, donc,

$$\exists y : g(-y) \neq g(y) \quad \text{or : la relation démontrée} \Rightarrow g(-y)^2 = g(y)^2$$

$$\Rightarrow g(-y) = -g(y) \neq 0 \Rightarrow \forall x : g(-x) = -g(x) \quad \text{c.q.f.d} \quad \leftarrow (2)$$

$$b) g(0)=0 \text{ (g impair)}. f(x) = f(x).f(0) + g(x).g(0) = f(x).f(0)$$

$$\Rightarrow f(0)=1 = f^2(x) + g^2(x) \quad \leftarrow (2)$$

$$c) \left. \begin{aligned} f(x-y) &= f(x)f(y) + g(x)g(y) \\ f(x+y) &= f(x)f(y) - g(x)g(y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (C) \text{ en additionnant} \quad \leftarrow (2)$$

3°. Si f est constante alors $f=1$ et $g=0$. ($f=0$ impossible (ii)) $\leftarrow (1)$

si f n'est pas constante alors, f vérifie (C) $\Rightarrow f(x) = \cosh \alpha x$ ou $f(x) = \cosh \alpha x$

$$\text{Or : } f(x) \leq 1 \text{ (car } f^2(x) + g^2(x) = 1) \Rightarrow f(x) = \cosh \alpha x \Rightarrow g(x) = \pm \sinh \alpha x \quad \leftarrow (3)$$

$$C) 1^\circ) g(0)=0 \quad \leftarrow (1)$$

$$\text{si } f(x) \neq 0 : f(x-y) + f(x+y) = 2f(x).g(-y) = 2f(x).g(y) \Rightarrow g \text{ paire} \quad \leftarrow (2)$$

$$2^\circ) \text{ si f est paire alors : } f(x+y) + f(x-y) = f(x+y) + f(y-x) = 2f(x).g(y) = 2f(y).g(x)$$

$$\Rightarrow f(x)g(y) = f(y)g(x) : y=0 \Rightarrow f(x) = f(0).g(x) : f \text{ et } g \text{ colinéaires} \quad \leftarrow (3)$$

$$3^\circ). f(x)=0 \Rightarrow f(x+y) + f(x-y) = 0 : y=x \Rightarrow f(x+2x) = f(x) \quad \leftarrow (2) \quad (3)$$

$$y=x-x \Rightarrow f(x-2x) = f(x) \Rightarrow f(x+2x) + f(x-2x) = 2f(x) = 2f(x)g(2x) \Rightarrow g(2x)=1$$

$\Rightarrow$ Si f est impaire alors : f périodique ou f ne s'annule qu'en 0. $\leftarrow (2)$

$$4^\circ). \text{ si } g(x) = \cosh \alpha x : f(x) = \lambda \cosh \alpha x + \mu \sinh \alpha x \quad \leftarrow (8)$$

$$\text{si } g(x) = \sinh \alpha x : f(x) = \lambda \cosh \alpha x + \mu \sinh \alpha x$$