

Corrigé du devoir surveillé.

I. 0) En notation complexe, sur $F_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_1(z) = \sqrt{2} e^{i\pi/4} z \rightarrow H(f_1, \beta, \beta) = F_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D'où : $H(f, \beta) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 3I_2 \end{pmatrix} = A$

b) La matrice de passage de B à β s'écrit : $P = \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ et si on pose $B = H(f, B)$ alors : $A = P^{-1} B P$ i.e. $B = P A P^{-1}$.

Puis, on vérifie que $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ d'où $B = \begin{pmatrix} G & H \\ H & G \end{pmatrix}$ où $G = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) a) On remarque que

$H(\alpha) = H(f, \beta) + (\alpha - 2)I_4 = P[A + (\alpha - 2)I_4]P^{-1}$ donc, en vertu des propriétés des déterminants, $\det H(\alpha) = \det(A + (\alpha - 2)I_4) = \det \begin{pmatrix} F + (\alpha - 2)I_2 & 0 \\ 0 & (\alpha + 1)I_2 \end{pmatrix} = (\alpha + 1)^2 \begin{vmatrix} \alpha - 1 & -1 \\ 1 & \alpha - 1 \end{vmatrix}$

$\det H(\alpha) = (\alpha + 1)^2 (\alpha - 1)^2 + 1 = \alpha^4 - \alpha^2 + 2\alpha + 2$

b) $\det H(2) = 18 \neq 0$ donc $H(2)$ est inversible.

c) $\det(H(2) - \lambda I_4) = \det H(2 - \lambda) = (3 - \lambda)^2 ((1 - \lambda)^2 + 1) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 23\lambda^2 - 30\lambda + 18$.

La méthode de calcul a été indiquée ci-dessus.

2) A ce stade, il n'y a plus rien à faire : rappelons que le p.g.c.d. de P et P' s'obtient en faisant les divisions euclidiennes de P par P' puis des restes entre eux.

$P \wedge P' = X - 3 \Rightarrow 3$ racine double de P et $P = (X - 3)^2 (X^2 - 2X + 2)$.

et sur $\mathbb{C}$: $P = (X - 3)^2 (X - 1 + i)(X - 1 - i)$.

II. 1) $x' = 1 - e^t - t e^t$, $x'' = -e^t(1 + t) \Rightarrow x'$ ne s'annule que pour $t = 0$.

$y' = t e^t$ d'où :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
x'	+	0	-
x	$+\infty$	0	$-\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+

B. I. : en $+\infty$ $y \sim t$ et $x \sim -t e^t$.

$\frac{y}{x} \rightarrow 0$ B.P. d'axe Ox .

en $-\infty$: $y = \ln\left(\frac{e^{-t}}{2}(1 + e^{2t})\right) = -t - \ln 2$

$+ e^{2t} + o(e^{2t})$: $y + x = -\ln 2 - t e^t + o(t e^t)$

$\Rightarrow$ asymptote : $y + x = -\ln 2$.

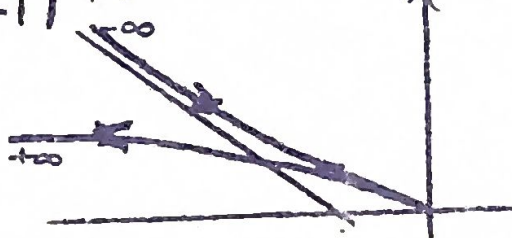
2) en $(0, 0)$: $x'(t) = -2t - \frac{3}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + o(t^3)$ $y'(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + o(t^3)$: on a 1 p^r de rebroussement de

1^{re} espèce :



3) courbe



III. 1) Equation homogène : $y = C e^{-1/x}$. Puis, en faisant varier la

constante : $y = A e^{-1/x} - 1 + e^{-1/x} F(x)$ (il faut distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$)