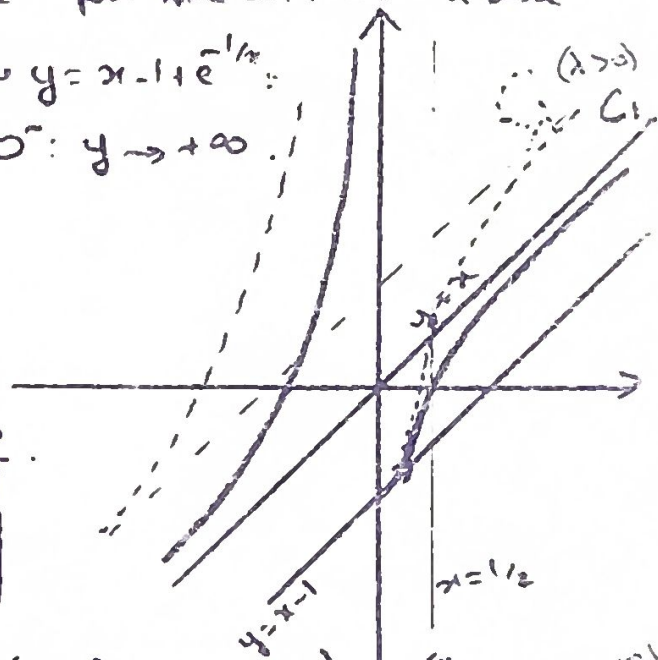


2) On vérifie que  $y = x - 1$  est solution particulière d'où l'ensemble des solutions de (E):  $y = x - 1 + k e^{-1/x}$ ; ce qui nous permet de dire que  $f(x) = x e^{1/x} + 6$  et on vérifie aisément que:  $f'(x) = (1 - 1/x) e^{1/x}$ .

3) Si on dérive (E):  $x^2 y'' = (2x - 1)(y' - 1)$ . On a un point d'inflexion si  $y''$  s'annule et change de signe. or:  $y''$  s'annule pour  $x = 1/2$  et pour  $y'(1/2) \neq 1$ ,  $y'$  change de signe: et  $y'(1/2) = 1 \Rightarrow y = x - 1$  la courbe obtenue est une droite. Conclusion, les points d'inflexion sont tous sur la droite  $x = 1/2$ .

Si on pose  $y(1/2) = m$ : équation de la tangente:  $Y - m = y'(1/2)(X - 1/2)$  et  $y'(1/2) = 4m + 3 \Rightarrow Y - m = (4m + 3)(X - 1/2)$  équation d'un faisceau de droites passant par  $(-1/4, -3/4)$ .

4) Toutes les courbes se déduisent de  $y = x - 1 + e^{-1/x}$  par une affinité d'axe  $y = x - 1$ , de direction  $Oy$ , de rapport  $\lambda$ : c'est-à-dire de  $y = x - 1 + e^{-1/x}$ .  
car  $\infty: y = x - \frac{1}{x} + o(1/x)$ . en  $0^+$ :  $y \rightarrow -1$  et en  $0^-$ :  $y \rightarrow +\infty$ .



IV. 0) Il faut  $q \neq 0$ .

1).  $\varphi'(x) = -\frac{p}{q}$

$\varphi''(x) = -\frac{p'q - pq'}{q^2}$  et  $p' = x - \frac{p}{q}$   $q' = \delta - \frac{p}{q}$   
 $\Rightarrow \varphi''(x) = \frac{-2q^2 + 2\delta pq - p^2}{q^3} \Rightarrow R = \frac{-2q^2 + 2\delta pq - p^2}{q^3}$

2). a)

$f(x, y) = (x - x_0)p + (y - y_0)q + \frac{1}{2}[(x - x_0)^2 r + 2(x - x_0)(y - y_0)\delta + (y - y_0)^2 t] + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|^2)$

b) Tangente  $\bar{\alpha}(C)$ :  $(x - x_0)p + (y - y_0)q = 0$

Equation du faisceau de cercle:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda[(x - x_0)p + (y - y_0)q] = 0$

c) Si on écrit l'intersection du cercle et de (C), on obtient:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \frac{\lambda}{2}[(x - x_0)^2 r + 2(x - x_0)(y - y_0)\delta + (y - y_0)^2 t] + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|^2) = 0$

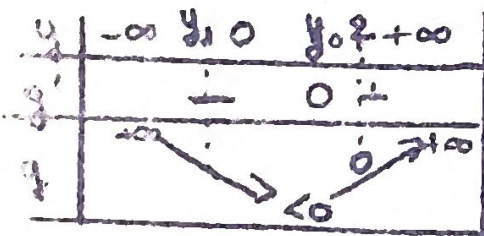
Pour que le cercle soit osculateur, il faut pouvoir mettre  $p(x - x_0) + q(y - y_0)$  en facteur dans l'expression du 2<sup>ème</sup> degré: i.e. en remplaçant  $y - y_0$  par  $-\frac{p}{q}(x - x_0)$ , on trouve:

$\lambda = \frac{2(p^2 + q^2)}{r q^2 - 2\delta p q + t p^2}$  or le rayon du cercle est:  $R = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{2}$ . c.q.f.d.

3<sup>o</sup>. a)  $f(1, y) = 2^y - 2 - y = g(y)$ .  $g'(y) = 2^y \ln 2 - 1$  et en posant  $y_0 = \frac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2}$

d'où: 1<sup>ère</sup> solution:  $y = 2$ .

2<sup>ème</sup> solution:  $y \approx -1.769$



b) On trouve  $p = 2, q = 4\ln 2 - 1, r = 2, \delta = 1 - \ln 2, t = 4(\ln 2)^2$  d'où

$R = \frac{\sqrt{5 - 8\ln 2 + 16(\ln 2)^2}}{2}$