

I. 1°/ $\frac{\partial x}{\partial x} = \sqrt{1+y^2} + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}$ $\frac{\partial x}{\partial y} = \sqrt{1+y^2} + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}$ $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ $\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

φ est continuellement différentiable car ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Un calcul immédiat donne $J_\varphi = 0$.

2°/ $X = \sinh(u+v)$ et $Y = e^{u+v}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ donc, $u+v$ décrit $\mathbb{R}$.

$X = \frac{1}{2} \left(Y + \frac{1}{Y} \right)$ $\frac{1}{2}$ hyperbole limitées à $Y > 0$.

II 1°/ En exprimant que w est exacte, après avoir simplifié par $(y-x)^2$ et posé $u = x^2 + y^2$, on obtient: $u f'(u) + 2f(u) = 0$ i.e.: $f(u) = \frac{C}{u^2}$ ($u > 0$)

2°/ On pose: $w = dF$ et après calculs, on trouve: $F(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + K$.
Les courbes intégrales sont des cercles d'équation:

$x^2 + y^2 + d(x+y) = 0$: $d \neq 0$: centres sur la 1^{ère} bissectrice, passant par l'origine avec une intégrale particulière: $y+x=0$: la 2^{ème} bissectrice.

III. On pose: $y = d e^x \Leftrightarrow$ si on pose $z = d'$: $z'(1+x) + z \cdot 2x = x e^{-2x}$

On intègre cette équation: $z = C e^{-2x} (1+x)^2 \Leftrightarrow C = \frac{-2x-1}{2(1+x)^2} + K$.

i.e.: $z = \frac{-2x-1}{2} e^{-2x} + K e^{-2x} (1+x)^2$

et après intégration: $d = \frac{x+1}{2} e^{-2x} - \frac{K}{4} (2x^2 + 6x + 5) e^{-2x} + K'$

Conclusion:

$x > -1$: $y = \frac{x+1}{2} e^{-x} + C_1 (2x^2 + 6x + 5) e^{-x} + C_2 e^x$

$x < -1$: $y = \frac{x+1}{2} e^{-x} + C_3 (2x^2 + 6x + 5) e^x + C_4 e^x$

Solutions C_2 : on pose $t = x+1$; écrivons 1 D.L. de y à l'ordre 2:

$y = e C_1 + \frac{C_2}{e} + t \left(e C_1 + \frac{C_2}{e} + \frac{1}{2} e \right) + \frac{t^2}{2} \left(e C_1 + \frac{C_2}{e} - \frac{e}{2} \right) + o(t)$: i.e. pour qu'une solution soit C^2 , il faut et il suffit que: $e C_1 + \frac{C_2}{e} = e C_3 + \frac{C_4}{e}$

IV. On connaît les racines de l'équation résolvante: $-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ i.e.: j et j^2 , d'où: $\alpha = \beta = 1$.

Il faut maintenant calculer les dérivées successives de: $\frac{x^5-1}{x-1} e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Posons $h(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) e^{jx}$ alors,

$g(x) = \operatorname{Re} (h(x) + h'(x) + h''(x))$ si $d(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$:

alors: $h(x) + h'(x) + h''(x) = (d'(1+2j) + d'') e^{jx} = e^{-x/2} \left(\cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + i \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right) \times (d'' + i\sqrt{3}d')$

d'où:

$g(x) = e^{-x/2} \left[(12x^2 + 6x + 2) \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right]$ c.q.f.d.