

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE 4 heures

PARTIE 2

Devoir surveillé n°12 Lundi 3/06/85

Les différentes parties de ce problème sont, dans une très large mesure, indépendantes.

Il est possible par exemple d'aborder la partie 2 en admettant certains résultats fournis dans la partie 1.

Les parties 3, 4, 5 sont totalement indépendantes des deux premières et mis à part les notations et des résultats fournis dans l'énoncé elles sont elles-mêmes indépendantes entre elles.

Soit E l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f^2(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f'(x))^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f''(x))^2 dx$$

soient convergentes.

PARTIE 1

1° Montrer que si les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) dx$ sont convergentes alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx$ est convergente et vérifie la relation

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) dx.$$

On pourra considérer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(x) + g(x))^2 dx$$

2° Montrer que E est un espace $\mathbb{R}$ vectoriel.

3° Montrer que pour une fonction f de E l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx$ converge.

4° a. En considérant $\int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) dx$, montrer que f admet des limites en plus et moins l'infini; montrer ensuite que ces limites sont nulles.

b. Montrer de même que f' admet une limite nulle en plus et en moins l'infini.

5° Soit λ donné, strictement positif, et E_λ l'ensemble des fonctions qui s'écrivent comme le produit d'une fonction polynomiale par la fonction

$$\exp\left(-\frac{\lambda}{2} x^2\right).$$

Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

On rappelle qu'un vecteur propre x pour un endomorphisme F , associé à la valeur propre λ , est un vecteur non nul tel que $F(x) = \lambda \cdot x$.

Soit $C(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques réelles définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables.

Soit L, A, B les applications de $C(\mathbb{R})$ dans $C(\mathbb{R})$, qui, à la fonction f , font correspondre $L(f), A(f), B(f)$, définies par :

$$L(f)(x) = -\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + x^2 \cdot f(x)$$

$$A(f)(x) = -\frac{df}{dx}(x) + x \cdot f(x) \quad B(f)(x) = \frac{df}{dx}(x) + x \cdot f(x)$$

soit donc si Id désigne l'application identique de $C(\mathbb{R})$ et D l'opérateur de dérivation ($D(f) = f'$)

$$L = -D^2 + x^2 \cdot \text{Id}, \quad A = -D + x \cdot \text{Id}, \quad B = D + x \cdot \text{Id}$$

1° Montrer que L, A, B sont des endomorphismes de $C(\mathbb{R})$.

2° Soit f dans $C(\mathbb{R})$, en calculant $A \circ B(f)$, établir les relations

$$A \circ B = L - \text{Id}, \quad B \circ A = L + \text{Id}, \quad B \circ A - A \circ B = 2 \cdot \text{Id}$$

3° Montrer que L définit un endomorphisme de E_1 (voir la définition au 5° de la partie 1). On notera F la restriction de L à E_1 . (On remarquera qu'il en est de même pour A et B .)

4° On se propose d'étudier les éléments propres de F .

a. Résoudre dans $C(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $A(f) = 0$.

Soit f dans E_1 un vecteur propre de F associé à la valeur propre s .

b. Montrer que $A(f)$ est un vecteur propre de F et donner la valeur propre associée (on pourra utiliser les relations du 2° de la partie 2).

5° Soit maintenant f dans E_1 un vecteur propre de F associé à une valeur propre s différente de 1.

a. Montrer que $B(f)$ est vecteur propre de F et indiquer la valeur propre correspondante.

b. Montrer que 1 est une valeur propre de F et donner un vecteur propre associé, ce qui indiquera la raison de la restriction du 5° a.

6° Montrer en considérant pour un vecteur propre de F $\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(x) \cdot f(x) dx$ que les valeurs propres de F sont strictement positives.

7° a. Montrer que 1 est la seule valeur propre de F dans l'intervalle fermé $[0, 2]$ en utilisant le 5°.

b. En déduire toutes les valeurs propres de F ; peut-on donner pour chaque valeur propre de F un vecteur propre associé en fonction de A et des puissances de A ?

8° Si f et g sont des éléments de E_1 vérifier par des intégrations par parties que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(x) \cdot g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot F(g)(x) dx.$$