

PARTIE 3

On conviendra désormais d'identifier un polynôme avec la fonction polynomiale qui lui est associée.

Soit $y = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ l'élément de E_1 .

On pose $V_n = A^n(y)$.

1° Soit $H_n = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot V_n$, montrer que H_n est un polynôme.

2° Montrer que sur $R[X]$ ensemble des fonctions polynomiales, l'application :

$$(P, Q) \longrightarrow B(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \cdot P(x) \cdot Q(x) dx$$

définit un produit scalaire.

3° a. Montrer que pour tout n entier naturel,

$$H_n = (-1)^n \cdot \exp(x^2) \cdot D^n(\exp(-x^2)) \quad (D \text{ désigne l'opérateur de dérivation}).$$

b. Montrer que H_p est un polynôme de degré p et calculer le coefficient de son terme de degré p .

4° Montrer que pour tout polynôme P de $R(X)$ de degré au plus n , pour tout k de $[0, n]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D^k(\exp(-x^2)) \cdot P(x) dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(-x^2)) \cdot P^{(k)}(x) dx$$

5° Dédurre du 4° que pour tous les entiers naturels n et p distincts :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) H_n(x) \cdot H_p(x) dx = B(H_n, H_p) = 0.$$

6° En déduire que les H_p pour p entier naturel compris entre 0 et n constituent une base orthogonale de $R_n[X]$, ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus n .

PARTIE 4

On rappelle que d'après la partie 3, les H_i pour i compris entre 0 et n constituent une base orthogonale de $R_n[X]$ pour le produit scalaire du 2° de la partie 3.

1° Montrer que, quel que soit le polynôme Q de degré strictement inférieur à n ,

$$B(Q, H_n) = 0.$$

2° a. Si $P = \sum_{i=0}^n a_i \cdot H_i(x)$ donner une expression des a_i .

b. Soit P un polynôme de degré n exactement et tel que pour tout polynôme Q de degré strictement plus petit que n ,

$$B(P, Q) = 0.$$

Montrer que P est proportionnel à H_n ; soit $P = a \cdot H_n$.

3° En considérant $B(H_k, H_i) = 0$ pour $i \neq k$ et en effectuant une intégration par parties, montrer que (H_i) est proportionnel à H_{i-1} , et donner le coefficient de proportionnalité.

4° On pose :

$$N(H_n) = B(H_n, H_n)^{1/n} \text{ et on donne } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}.$$

Montrer que :

$$N(H_n) = \sqrt{2} \cdot n \cdot N(H_{n-1}) \text{ et en déduire } N(H_n).$$

5° Déterminer $(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$ et écrire la matrice représentant la restriction du produit scalaire $B(P, Q)$ à $R_4[X]$ dans la base $(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$.

PARTIE 5

1° Justifier l'existence des coefficients $U_n(x)$ tels que :

$$\exp(2 \cdot t \cdot x - t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) \cdot \frac{t^n}{n!} \text{ pour tout } t \text{ de } \mathbb{R}.$$

2° Montrer que $U_n(x) = (-1)^n \cdot H_n(x)$ pour tout entier naturel n et donc que :

$$\exp(2 \cdot t \cdot x - t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot H_n(x) \cdot \frac{t^n}{n!}.$$