

I. 1°. Il suffit de passer à la limite : $\left(\int_x^Y f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_x^Y f^2(x)dx \cdot \int_x^Y g^2(x)dx$

2°. Il suffit de montrer que c'est stable pour l'addition :

on utilise Minkowski : $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)+g(x))^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) dx\right)^{1/2}$
 en remplaçant f et g par :

xf et xg puis par f' et g' et enfin par f'' et g'' .

De façon évidente, si $f \in E$ alors $xf \in E$. c.q.f.d.

3°. si $x < -1$ et $x > 1$ alors : $\int_x^Y f^2(x)dx \leq \int_{-1}^{+1} f^2(x)dx + \int_x^Y x^2 f^2(x)dx$

$\leq \int_{-1}^{+1} f^2(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f^2(x)dx = H$. Comme $\int_x^Y f^2(x)dx$ est majorée, cette intégrale converge.

4°. a). $[f(x)^2]' = 2f(x)f'(x)$. On sait que $\int_{-1}^{+\infty} 2f(x)f'(x)dx$ converge grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, donc $\int_{-1}^X 2f(x)f'(x)dx$ a une limite quand $X \rightarrow +\infty$: i.e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x)$ existe ; or, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx$ converge, cette limite est nulle. Idem pour $x \rightarrow -\infty$

b) On fait de même avec $\int_{-1}^{+\infty} 2f'(x)f''(x)dx$

5°) Il faut montrer que $E_1 \subset E$: si $f(x) = P(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ alors :
 $xf(x) \sim a_n x^{n+1} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $f'(x) \sim a_n x^{n+1} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ et $f''(x) \sim a_n x^{n+2} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
 donc, les intégrales convergent bien.

E_1 stable pour $+$ et $\cdot$ donc E_1 s.e.v. de E .

II. 1°. évident.

2°. $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}))$ est une algèbre : $A \circ B = -B^2 - D_0(x \cdot Id) + xD + x^2 Id$.

or : $D_0(x \cdot Id) = Id + xD$ d'où le résultat. De même pour $B \circ A$

3°. Si $f(x) \in E_1$ alors $f''(x)$ et $x^2 f(x) \in E_1$: i.e. $L \in \mathcal{B}(E_1)$.

4°) a) on trouve $f(x) = Ce^{+x^2/2}$, $C \in \mathbb{R}$: si $f \in E_1$: $A(f) \neq 0$.

b) On a : $F(A(f)) = A_0(B_0 A)(f) + A(f) = A_0(F(f) + f) + A(f) = (3+2)A(f)$

5°. a) de même, on trouve : $F(B(f)) = (3-2)B(f)$. ($B(f) \neq 0$)

b) On a : $F(e^{-x^2/2}) = e^{-x^2/2}$ et $B(e^{-x^2/2}) = 0$ (!)

6°. Soit $a = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(x)f(x)dx$ comme $F(f) = \Delta \cdot f$: $a = \Delta \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx$

Puis : $F(f)(x) = -f''(x) + x^2 f(x)$: $a = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f^2(x)dx + b$

où $b = -\int_{-\infty}^{+\infty} f''(x)f(x)dx = \left[-f'(x)f(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ (intégration par parties). Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$: $b = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$

Conclusion : $a > 0$ donc $\Delta > 0$ c.q.f.d.

7°. a) Soit $\Delta \in [0, 2] - \{1\}$: $B(f)$ est vecteur propre donc ; comme

$\Delta - 2 \leq 0$ $B(f) = 0$ (sinon $\Delta - 2$ serait 1 valeur propre négative ou nulle)

comme $\Delta \neq 1$: $B(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ i.e. $F(f) = \Delta f \Rightarrow f = 0$

la seule valeur propre ≤ 2 est 1.