

7° b) En utilisant le 4° b et le 5° a, si λ est valeur propre de F $\lambda > 2$ alors $\lambda - 2$ et $\lambda + 2$ sont valeurs propres donc l'ensemble des valeurs propres de F est : $2\mathbb{N} + 1 = \{2n+1, n \in \mathbb{N}\}$.

Si on pose : $f = e^{-x^2/2}$, alors les vecteurs propres associés sont les fonctions $A^n(f)$.

8°). Posons $A(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(x) \cdot g(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x) g(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) g(x) dx$.

Par un calcul analogue à celui effectué au 6°, on trouve :

$$A(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) g'(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) g(x) dx = A(g, f) \text{ c.q.f.d.}$$

III. 1°) Posons $A^n(y) = H_n(x) e^{-x^2/2}$ alors : $A^{n+1}(y) = (-H_n'(x) + 2x H_n(x)) e^{-x^2/2}$

donc : $H_{n+1} = 2x H_n - H_n'$ (1) Comme $H_1(x) = 2x$, par récurrence H_n est bien un polynôme.

2°). B est bien bilinéaire symétrique, définie positive.

3°). a) Soit $L_n = (-1)^n \exp(x^2) D^n(\exp(-x^2))$.

$$D^{n+1}(\exp(-x^2)) = D((-1)^n L_n \exp(-x^2)) = (-1)^{n+1} \exp(x^2) \cdot (+2x L_n - L_n')$$

d'où $L_{n+1} = 2x L_n - L_n'$ et comme $L_1 = H_1 = 2x$ alors, par récurrence :

$$L_n = H_n.$$

b) Si on appelle a_n le coef. de x^n dans H_n , alors : (1) $\Rightarrow a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow a_n = 2^n$ et $\deg(H_n) = n$

4°) On fait la intégration par parties et on remarque que : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_n(x) Q_n(x) e^{-x^2/2} = 0$.

$$\begin{aligned} 5^\circ. \text{ Si } n > p \text{ alors } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) H_n(x) H_p(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n D^n(\exp(-x^2)) H_p(x) dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) H_p^{(n)}(x) dx = 0 \text{ car } H_p^{(n)} = 0 \end{aligned}$$

6°) Evident !

IV. 1°. Même démonstration qu'au III. 5°.

$$2^\circ. a) B(P, H_0) = a_p B(H_p, H_0) \Rightarrow a_i = \frac{B(P, H_i)}{B(H_i, H_i)}.$$

b) On a : $a_i = 0$ pour $i < n$ donc $P = a_n H_n$.

$$\begin{aligned} 3^\circ. B(H_{n+1}, H_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} D^{n+1}(\exp(-x^2)) H_i(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} D^n(\exp(-x^2)) H_i'(x) dx \\ &= B(H_n, H_i') \end{aligned}$$

En utilisant le 2°. b) on conclut : $H_i' = a H_{i-1}$.
Regardons les coef. de x^{i-1} : $-i \cdot 2^i = a \cdot 2^{i-1} \Rightarrow a = 2i$.

4°. Comme $n+1 \neq n$ alors : $B(H_n, H_n) = B(H_{n-1}, H_n')$ (cf. 3°).

$$H_n' = 2n H_{n-1} \Rightarrow B(H_n, H_n) = 2n B(H_{n-1}, H_{n-1}) \text{ c.q.f.d.}$$

$$N(H_n) = \sqrt{2^n n!} \quad N(H_0) = \sqrt{2^0 0!} \sqrt{\sqrt{\pi}}$$

5°. Grâce à la formule (1) on trouve :

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 8x^2 - 12x$$

$$H_3 = 4x^3 - 2, \quad H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

la base $(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$ étant

orthogonale, la matrice de B

s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sqrt{2\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 38\sqrt{2\pi} \end{pmatrix}$$