

I. Nombres complexes, trigonométrie

1°. Calculer les sommes : $C = \sum_{k=0}^n \frac{\cos k\alpha}{(\cos \alpha)^k}$ et $S = \sum_{k=0}^n \frac{\sin k\alpha}{(\cos \alpha)^k}$

2°. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$: $\bar{x}y \neq 1$ et $z = \frac{x-y}{1-\bar{x}y}$. Montrer :

a) $(|z| < 1) \Leftrightarrow ((|x| < 1) \text{ et } (|y| < 1)) \text{ ou } ((|x| > 1) \text{ et } (|y| > 1))$

b) $(|z| = 1) \Leftrightarrow (|x| = 1) \text{ ou } (|y| = 1)$

3°. a) En utilisant la formule d'Euler et la formule du binôme de Newton, montrer que : $\cos^{2p} x = \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^{2k} \cos 2(p-k)x + \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^{2p}$

b) Si $\beta \in \mathbb{Z}$, calculer la somme :

$$\sum_{q=0}^{2n-1} \cos(\alpha + \beta q \frac{\pi}{n})$$

c) En déduire la valeur de $S(x) = \sum_{q=0}^{2n-1} \cos^{2p}(x + \frac{q\pi}{2n})$. Que remarque-t-on ?

II. Congruences

1°. On considère ici le groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \geq 2$). Soit $\bar{x}$ la classe d'équivalence dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de $x \in]0, n]$. On rappelle que $\bar{x}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $x \wedge n = 1$. On note $\varphi(n)$ le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

a) Calculer $\varphi(p)$ pour p premier. Montrer qu'il y a $p^{\alpha}-1$ nombres divisibles par p dans $]0, p^{\alpha}]$; en déduire $\varphi(p^{\alpha})$.

b) On suppose que $m \wedge n = 1$. Soit $f: \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par : $f(\bar{x}) = (\bar{y}, \bar{z})$ où : $y \equiv x[m]$ et $z \equiv x[n]$. Montrer que f est injective, puis bijective. En déduire que $\varphi(m.n) = \varphi(m).\varphi(n)$.

c) En déduire que si n se décompose en produit de facteurs premiers sous la forme : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ alors : $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(\dots)(1 - \frac{1}{p_r})$. Calculer $\varphi(1984)$.

2°. a) Montrer que, si $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(\bar{a})$, le groupe engendré par $\bar{a}$, est d'ordre $d_1 = n/d^*$. En déduire que, si $G_d = (d)$ alors $(\bar{a}) = (d)$ et donc que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède un seul sous-groupe $^*_d = a \wedge n$.