

I. Etude d'une suite :

Soit (u_n) la suite réelle définie par: $u_0 \in]0, 1[$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

1°. Montrer que la suite (u_n) est convergente, déterminer sa limite.

2°. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{1}{n+1}$.

3°. a) On pose $v_n = n u_n$; montrer que (v_n) est convergente.

b) Si $w_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$; trouver la limite de w_n , en déduire un équivalent de u_n .

II. Problème

(On rappelle que, si F est une primitive d'une fonction f continue, on note $\int_a^b f(x) dx$ la quantité: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$).

A. Soit (a_n) une suite infinie de nombres réels quelconques, dont le premier terme a_0 est égal à 1. Au polynôme $f_n(x) = (x + a)^n$, on fait correspondre le polynôme P_n obtenu en remplaçant, dans le développement de f_n , toute puissance a^p de a par le terme a_p de la suite (a_n) . On prendra en outre $P_0 = 1$.

1°) Ecrire les expressions des polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 .

2°) Donner la forme générale des polynômes P_n .

3°) Démontrer que les polynômes P_n vérifient pour $n \geq 1$ la relation $P'_n = n P_{n-1}$ ou P'_n est le polynôme dérivé de P_n (on utilisera une relation simple d'analyse combinatoire).

4°) Réciproquement, montrer que des polynômes P_n de degré n unitaires (i.e. le coef. du plus haut degré est 1), avec $P_0 = 1$, et vérifiant pour $n \geq 1$: $P'_n = n P_{n-1}$ peuvent être obtenus, comme il a été indiqué précédemment, à partir d'une suite quelconque $(a_n) = (1, a_1, a_2, \dots)$.

B. On désigne par Q_n des polynômes de degré n , unitaires et satisfaisant aux conditions:

$$\begin{cases} (C_0) : Q_0(x) = 1 \\ (C_1) : Q'_n(x) = n Q_{n-1}(x) \text{ pour } n \geq 1 \\ (C_2) : \int_0^1 Q_n(x) dx = 0 \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$