

Devoir surveillé n°2. Mercredi 20/10/82

Exercice:

1°) - Déterminer deux polynômes p et q de $\mathbb{R}[X]$, premiers entre eux, tels que : $p^2 + q^2 = (x^2 + 1)^2$.

On précisera pour cela, dans l'anneau $\mathbb{C}[X]$, la forme des polynômes $p + iq$ et $p - iq$. On en déduira que :

$$p = (x^2 - 1) \cos \varphi - 2x \sin \varphi$$

$$q = \varepsilon [(x^2 - 1) \sin \varphi + 2x \cos \varphi] \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \pm 1$$

2°) Calculer $p'^2 + q'^2$.

On désigne par P et Q deux polynômes dont les dérivées sont p' et q' respectivement. Montrer que l'on peut choisir P et Q pour que : $P^2 + Q^2 = k(x^2 + 1)^3$ où k est une constante que l'on déterminera.

Problème:

(On rappelle que, si F est une primitive d'une fonction f continue, on note : $\int_a^b f(x) dx$ la quantité $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.)

I. Soit (a_n) une suite infinie de nombres réels quelconques, dont le premier terme a_0 est égal à 1.

Au polynôme $f_n(x) = (x + a)^n$, on fait correspondre le polynôme $P_n(x)$ obtenu en remplaçant, dans le développement de $f_n(x)$, toute puissance a^p de a par le terme a_p , d'indice p , de la suite (a_n) . On prendra en outre $P_0 = 1$.

1°) Ecrire les expressions des polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 .

2°) Donner la forme générale des polynômes P_n .

3°) Démontrer que les polynômes P_n vérifient pour $n \geq 1$ la relation : $P'_n(x) = n \cdot P_{n-1}(x)$ où P'_n est le polynôme dérivé de P_n . (On utilisera la relation simple d'analyse combinatoire.)

4°) Montrer que, réciproquement, des polynômes P_n de degré n , unitaires (i.e. le coef de plus haut degré est 1), avec $P_0 = 1$, et vérifiant pour tout entier $n \geq 1$ la relation $P'_n = n P_{n-1}$, peuvent être obtenus, comme il a été indiqué précédemment, à partir d'une suite quelconque $(a_n) = (1, a_1, a_2, \dots)$.

II. On désigne par Q_n des polynômes de degré n , unitaires et satisfaisant aux conditions :

$$(C_0) \quad Q_0(x) = 1$$

$$(C_1) \quad Q'_n(x) = n Q_{n-1}(x) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

$$(C_2) \quad \int_0^1 Q_n(x) dx = 0 \quad \text{pour } n \geq 1$$

1°) Montrer que ces conditions permettent de déterminer de proche en proche, de façon unique, les polynômes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 et d'une façon générale Q_n connaissant Q_{n-1} .