

2) Chercher une solution particulière de (E) qui soit un polynôme ; en déduire une expression de F , puis vérifier le résultat.

3) Montrer que les points d'inflexion des courbes intégrales de (E) sont tous sur une même droite parallèle à l'axe des y , puis que les tangentes d'inflexion passent toutes par un même point.

4) Après une étude rapide des branches infinies, donner l'allure des courbes.
(DEUG MP1 Paris Nord 82)

IV. Calcul différentiel et rectification:

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $(x_0, y_0) \in A$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$. On note : $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$. On suppose qu'au voisinage de (x_0, y_0) , $f(x, y) = 0$ définit y comme fonction implicite d' x : $y = \varphi(x)$; on note (C) sa courbe représentative.

0) Préciser l'hypothèse manquante sur f pour qu'il en soit ainsi.

1) Exprimer $\varphi'(x_0)$, $\varphi''(x_0)$ à l'aide de p, q, r, s et t ; en déduire le rayon de courbure à (C) en (x_0, y_0) .

2) On se propose de retrouver ce résultat à l'aide des cercles de courbure:

a) Ecrire le développement de Taylor-Young pour $f(x, y)$ au voisinage de (x_0, y_0) à l'ordre 2 en utilisant p, q, r, s, t .

b) Donner l'équation de la tangente à (C) en (x_0, y_0) ainsi que l'équation du faisceau de cercles tangents à (C) en (x_0, y_0) .

c) En déduire le rayon de courbure en exprimant que le cercle de courbure est osculateur.

3) Application :

On prend ici $f(x, y) = (1+x)^y - 2 - xy$

a) Chercher les solutions de $f(1, y) = 0$ ①

b) On prend pour y la solution positive de ①, donner le rayon de courbure à (C) en ce point.