

1°) Montrer que ces conditions permettent de déterminer de façon unique les polynômes Q_n (On calculera explicitement Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4).

2°). Pour $n \geq 2$, remplacer la condition (C_2) par une condition équivalente (C_3) entre $Q_n(0)$ et $Q_n(1)$. Quel lien existe-t-il entre $Q_2(0)$ et $Q_2(1)$?

3°). a) Construire sommairement les graphes des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 pour $x \in [0, 1]$. Préciser les symétries rencontrées.

b) Pour s'assurer que ces symétries subsistent pour tout n , montrer que les polynômes $R_n(x) = (-1)^n Q_n(1-x)$ vérifient les conditions $(C_0), (C_1)$ et (C_2) . (On rappelle que $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$). En déduire la relation entre $Q_n(x)$ et $Q_n(1-x)$.

c) Déduire du b). i) les valeurs de $Q_n(1/2)$ pour n impair

ii) les valeurs de $Q_n(0)$ et $Q_n(1)$ pour n impair

(distinguer les cas $n = 1$ et $n \geq 3$).

4°) a) En développant $Q_n(x)$ et $Q_n(1+x)$ par les formules de Mac-Laurin et Taylor, calculer la différence $Q_n(1+x) - Q_n(x)$.

b) Trouver, à partir de la, une expression simple de la somme: $S_n = 1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n$. à l'aide des polynômes $Q_n(x)$. Achèver le calcul pour $n = 1, 2, 3$ et 4 .

C. On se propose de démontrer l'identité: $Q_n(-x) = d_n [Q_n(x) + n x^{n-1}]$ pour $n \geq 1$ (d_n est un coefficient, à déterminer, dépendant de n).

a) Quelle doit être nécessairement la valeur de d_n pour que cette identité soit satisfaite par les polynômes Q_n ?

b) Démontrer par récurrence, ou en utilisant des résultats démontrés ci-dessus, que cette identité est vérifiée par tout polynôme Q_n .

D Soit à démontrer: $Q_n(x) + Q_n(x+1/2) = \beta_n Q_n(2x)$ pour $n \geq 1$.

a) Quelle doit être nécessairement la valeur de β_n pour que cette identité soit satisfaite par les polynômes Q_n ?

b) Démontrer par récurrence que cette identité est vérifiée par tout polynôme Q_n .

c) Calculer $Q_n(1/2)$ en fonction de $Q_n(0)$.