

2°) Pour $n \geq 2$, on pose la condition (C_2) par une condition équivalente (C_2') entre $Q_n(0)$ et $Q_n(1)$. Pour $n=1$, quel lien existe-t-il entre $Q_1(0)$ et $Q_1(1)$?

3°) a) Construire numériquement les graphes des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 pour $0 \leq x \leq 1$. Les graphes présentent des symétries que l'on précisera.

b) Pour démontrer que ces symétries subsistent pour tout n , montrer que les polynômes $R_n(x) = (-1)^n Q_n(1-x)$ vérifient les conditions $(C_0), (C_1), (C_2)$. (On rappelle que $(P(u))' = f(u, u)$).

En déduire la relation entre $Q_n(x)$ et $Q_n(1-x)$.

c) Déduire de b) :

i) les valeurs de $Q_n(1/2)$ pour n impair.

ii) les valeurs de $Q_n(0)$ et $Q_n(1)$ pour n impair.

iii) les valeurs ou égal à 3 et pour $n=1$.

4°) a) En développant $Q_n(x)$ et $Q_n(1+x)$ par les formules de MacLaurin et Taylor, calculer la différence $Q_n(1+x) - Q_n(x)$.

b) Trouver, à partir de là, une expression simple de la somme $1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n$ à l'aide des polynômes $Q_n(x)$. Acheter le calcul pour $n=1, 2, 3$ et 4.

III. On propose de démontrer l'identité : $Q_n(-x) = \alpha_n [Q_n(x) + n x^{n-1}]$ pour $n \geq 1$, où α_n est un coefficient dépendant de n .

a) Quelle doit être nécessairement la valeur de α_n pour que cette identité soit satisfaite par les polynômes Q_n ?

b) Démontrer par récurrence, ou en utilisant des dérivées, que cette identité est vérifiée par

IV. On se propose de démontrer l'identité

$$Q_n(x) + Q_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = \beta_n Q_n(2x) \quad \text{pour } n \geq 1$$

où β_n est un coefficient dépendant de n .

a) Quelle doit être nécessairement la valeur de β_n pour que cette identité soit satisfaite par les polynômes Q_n ?

b) Démontrer par récurrence que cette identité est vérifiée par tout polynôme Q_n .

c) Calculer $Q_n(1/2)$ en fonction de $Q_n(0)$.

(d'après E.N.S.E.T.B.)