

I.

1°) Récurrences immédiates

← (3)

2°) a) i) ii) immédiates.

← (2)

b)  $u_0 + \sqrt{a} \neq 0 \Rightarrow$  grâce à i)  $u_1 + \sqrt{a} \neq 0$  et par récurrence  $u_n + \sqrt{a} \neq 0$ .  
 $u_n = u_{n-1}^2$  (en utilisant i et ii)  $\Rightarrow u_n = u_0^{2^n} = R^{2^n}$  (attention aux puissances)

Expression de  $u_n$ :

$$u_n = \sqrt{a} \cdot \frac{1 + R^{2^n}}{1 - R^{2^n}}$$

← (5)

3°) a) il faut et il suffit d'étudier la position de  $|R|$  par rapport à 1.

$-1 < \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} < 1 \Leftrightarrow u_0 > 0$  (il faut résoudre l'inéquation).

Donc:

$$|R| < 1 \Leftrightarrow u_0 > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{a}$$

← (6)

$$|R| > 1 \Leftrightarrow u_0 < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\sqrt{a}$$

(On remarque que l'équation  $|R|=1$  est impossible).

b) si  $u_0 > 0$  alors,  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$ , donc, si  $u_n < \sqrt{a}$  alors  $\frac{a}{u_n} > \sqrt{a}$   
 de même, si  $u_n > \sqrt{a}$  alors  $\frac{a}{u_n} < \sqrt{a}$  etc. En conclusion,  $(u_n, \frac{a}{u_n})$  réalise un encadrement de  $\sqrt{a}$ .

← (2)

4°). Comme  $u_0 > 0$ , en utilisant la 2° a) i) on en déduit que  $u_n > \sqrt{a} > u_0$ .

Majoration de  $u_n - \sqrt{a}$ :

Par récurrence:  $u_1 - \sqrt{a} = (u_0 - \sqrt{a})^2 / 2u_0 = \pi^2 / 2u_0 \Rightarrow \alpha_1 = 2 \quad \beta_1 = -1$ .

si  $u_n - \sqrt{a} < \pi^{\alpha_n} / (2u_0)^{\beta_n}$  alors:

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = (u_n - \sqrt{a})^2 / (2u_n) < \pi^{2\alpha_n} / (2u_0)^{2\beta_n} (2u_n) < \pi^{2\alpha_n} / (2u_0)^{2\beta_{n+1}}$$

donc:  $\alpha_n = 2\alpha_{n-1}$  et  $\beta_n = 2\beta_{n-1} + 1$

d'où:

$$u_n - \sqrt{a} < \pi^2 / (2u_0)^{2^n - 1}$$

← (6)

Application: on veut que  $u_n - \sqrt{5} < 10^{-19}$ , il suffit donc que:  $\pi^2 / (2u_0)^{2^n - 1} < 10^{-19}$   
 i.e.  $\left[ \frac{1}{4^{2^n - 1}} \right] < 10^{-19}$  et en prenant les log en base 10  $\Leftrightarrow 2(2^n - 1) \log 2 > 19$ .  
 d'où le résultat:  $n = 4$ .

Calcul de  $u_4$ :  $u_1 = \frac{9}{4}$ ,  $u_2 = \frac{161}{72}$ ,  $u_3 = \frac{51841}{23184}$ ,  $u_4 = \frac{51841}{46368} + \frac{57960}{51841}$  ← (9)  
 $u_4 = \frac{5374978561}{2403763488} \simeq 2,236.067.977.499.789.696.448$ .

II. Justification: dans  $\mathbb{R}[X]$ , on a équivalence entre

← (2)

identité formelle et identité fonctionnelle.

1°) a).  $P_2 = X^2 + X + 1/8$

$$P_3 = X^3 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{9}{16}X + \frac{1}{32}$$

$$P_4 = X^4 + 2X^3 + \frac{5}{4}X^2 + \frac{X}{4} + \frac{1}{128}$$

← (5)

b). Par une récurrence immédiate, on trouve:  $\deg P_n = n$  et  $P_n$  unitaire.

c)  $P_0(-X-1) = P_0(X)$ ,  $P_1(-X-1) = -P_1(X)$ ,  $P_2(-X-1) = P_2(X)$

Montrons par récurrence que:  $P_n(-X-1) = (-1)^n P_n(X)$ .

(2)