

Corrigé du B. 3.

I. 1°) $C + iS = \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{i\alpha}}{\omega\alpha} \right)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} \Rightarrow$

$$C = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\omega^n \alpha \sin \alpha}$$

$$S = \frac{(\cos \alpha)^{n+1} - \cos(n+1)\alpha}{\omega^n \alpha \sin \alpha}$$

2°) $|z|^2 = \frac{|x|^2 + |y|^2 - x\bar{y} - \bar{x}y}{1 + |x|^2|y|^2 - x\bar{y} - \bar{x}y} \Rightarrow 1 - |z|^2 = \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{1 + |x|^2|y|^2 - x\bar{y} - \bar{x}y}$

d'où : a) $1 - |z|^2 > 0 \Leftrightarrow ((|x| < 1) \text{ et } (|y| < 1)) \text{ ou } ((|x| > 1) \text{ et } (|y| > 1)) \Leftrightarrow (3)$
 b) $1 - |z|^2 = 0 \Leftrightarrow (|x| = 1) \text{ ou } (|y| = 1).$

3°) a) $\left(\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \right)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left[\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (e^{2i(p-k)\alpha} + e^{-2i(p-k)\alpha}) + C_{2p}^p \right]$
 d'où la formule demandée. on regroupe les termes $C_{2p}^k e^{2i(p-k)\alpha}$ et $C_{2p}^{2p-k} e^{-2i(p-k)\alpha}$

b) Si on pose $S = \sum_{q=0}^{2n-1} \sin(\alpha + (p+q)\pi/n)$
 alors : $C + iS = e^{i\alpha} \sum_{q=0}^{2n-1} (e^{i(p+q)\pi/n}) = e^{i\alpha} \frac{1 - e^{2i(p+n)\pi/n}}{1 - e^{i(p+1)\pi/n}} = 0$ si $\beta \neq 2k\pi$.
 $\Rightarrow$ $= 2n e^{i\alpha}$ dans le cas contraire.

c) $S(x) = \sum_{q=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k \cos(2(p-k)\alpha + (p-k)q\pi/n) + \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p \right)$

on permute les sommes obtenue en fait
 $\Rightarrow S(x) = \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{q=0}^{2n-1} C_{2p}^k \cos(2(p-k)\alpha + (p-k)q\pi/n) \right) + \frac{n}{2^{2p-1}} C_{2p}^p$
 $\alpha = 2(p-k)\alpha, \beta = p-k \neq 2k\pi.$

$S(x) = \frac{n}{2^{2p-1}} C_{2p}^p \Leftrightarrow (6)$

II. 1°) a) $\varphi(p) = p-1$ et cf. T.P. $\varphi(p^q) = p^q(1 - \frac{1}{p}) \Leftrightarrow (6)$

b) f injective $\Leftrightarrow f(x) = (0,0) \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow (2)$

On : $f(x) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0 \text{ et } z = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0[m] \text{ et } x \equiv 0[n] \Leftrightarrow x \equiv 0[mn]$
 Comme $\text{card}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ car m, n sont premiers
 $\Rightarrow x = 0$

On en déduit que f est bijective. $\Leftrightarrow (2)$

D'où : $U(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) \cong U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$
 $\varphi(m,n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

c) Par récurrence, on a : $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_r})$ et $\varphi(1984) = 960$
(3) (1)

2°) a) d'ordre du groupe monogène engendré par a et le plus petit entier > 0 tel que : $a \cdot a = 0 \Leftrightarrow a \cdot a = k \cdot n$. Or : $a = a_1 \cdot d$ et $n = n_1 \cdot d$ où $a_1, n_1 = 1$ donc : $a \cdot a_1 = k \cdot n_1$; $n_1 \mid a \cdot a_1$ donc : $n_1 \mid a$ et comme on veut d le plus petit possible $\Rightarrow d = n_1 = n/d$ i.e. $d = d_1$. $\Leftrightarrow (3)$

Comme $a \in (d)$ ($a = a_1 \cdot d$) $\Rightarrow (a) \subset (d)$ et comme ces 2 groupes ont le même nombre d'éléments : $(a) = (d)$. $\Leftrightarrow (2)$

Le seul sous groupe d'ordre (d_1) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc (a) . $\Leftrightarrow (1)$

b) On voit ou a) que a engendre (d) si : $a = a_1 \cdot d$ où : a_1, d sont premiers.