

Corrigé du devoir surveillé.

I. 1°. Par une récurrence immédiate, on a:  $u_n \in ]0, 1[$  et  $u_{n+1} \leq u_n$ .

Donc,  $(u_n)$  est convergente et sa limite vérifie:  $\ell = \ell(1-\ell)$ ,  $\ell \in [0, 1] \Rightarrow \ell = 0$ .

2°. Par récurrence sur  $n$ : vrai pour  $n=0$ . HR:  $u_n < \frac{1}{n+1}$

si  $u_n < \frac{1}{n+2}$  alors  $u_{n+1} \leq u_n < \frac{1}{n+2}$  OK.

si  $u_n \geq \frac{1}{n+2}$  alors:  $(n+2) \cdot u_{n+1} = (n+1)u_n + u_n(1 - (n+2)u_n) < 1$  OK. c.q.f.d.

3°. b)  $w_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n \cdot u_{n+1}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1-u_n}$  donc,  $\lim w_n = 1$ .

Or, on a:  $w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n}$  et grâce à la

convergence au sens de Césaro:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_0 + \dots + w_n}{n} = 1 \Rightarrow \boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$

a) On sait que:  $v_n < \frac{n}{n+1}$  (cf. 2°). Or:  $v_{n+1} = \frac{n+1}{n} v_n (1 - \frac{v_n}{n})$  ( $n \geq 1$ ).

d'où:  $v_{n+1} - v_n = \frac{v_n}{n} [1 - \frac{n+1}{n} v_n] > 0$ . Donc, la suite  $(v_n)$  est croissante et majorée (par 1), elle est convergente.

II A) 1°.  $P_1 = X + a_1$ ,  $P_2 = X^2 + 2a_1X + a_2$ ,  $P_3 = X^3 + 3a_1X^2 + 3a_2X + a_3$

$P_4 = X^4 + 4a_1X^3 + 6a_2X^2 + 4a_3X + a_4$ .

2°.  $P_n = X^n + na_1X^{n-1} + \dots + C_n^R a_R X^{n-R} + \dots + a_n$ .

3°.  $P'_n = nX^{n-1} + n(n-1)a_1X^{n-2} + \dots + (n-R)C_n^R a_R X^{n-R-1} + \dots + na_{n-1}$ .

Or:  $(n-R)C_n^R = n \cdot C_{n-1}^R \Rightarrow \boxed{P'_n = n \cdot P_{n-1}}$

4°. Réciproque: par récurrence:  $P'_1 = 1 \Rightarrow P_1 = X + a_1$  ( $a_1$  est la constante d'intégration). Si on connaît les polynômes  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ , peut-on déterminer  $P_n$ :  $P'_n = nX^{n-1} + \dots + nC_{n-1}^R a_R X^{n-R-1} + \dots + na_{n-1}$   
 $\Rightarrow P_n^B = X^n + na_1X^{n-1} + \dots + C_n^R a_R X^{n-R} + \dots + na_{n-1}X + a_n$  (on utilise la relation du 3° et  $a_n$  est la constante d'intégration).

B) 1°/ Par récurrence: pour  $n=1, 2, 3$  et 4 on trouve de manière unique:

$\boxed{Q_1 = X - 1/2; Q_2 = X^2 - X + 1/6; Q_3 = X^3 - 3/2X^2 + 1/2X; Q_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - 1/30}$

si  $Q_{n-1}$  est calculé alors (C<sub>1</sub>) détermine  $Q_n$  à une constante additive près et (C<sub>2</sub>) permet de calculer cette constante  $\Rightarrow$  la suite  $Q_n$  est bien déterminée de manière unique.

2°.  $Q_n(x) = \frac{1}{n+1} Q'_{n+1}(x) \Rightarrow (C_2) \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} [Q'_{n+1}(x)]'_0 = 0 \Leftrightarrow \forall n \geq 2: Q_n(1) = Q_n(0)$

pour  $n=1$  on a:  $Q_1(0) = -Q_1(1)$ .

3°. a) la condition (C<sub>1</sub>) permet de connaître

la p<sup>me</sup> de la dérivée de  $Q_n$  lorsqu'on a construit la courbe représentative de  $Q_{n-1}$ :

b) Il suffit de montrer que les polynômes  $R_n$  vérifient (C<sub>0</sub>), (C<sub>1</sub>) et

(C<sub>2</sub>): (C<sub>0</sub>).  $R_0 = Q_0 = 1$ .

(C<sub>2</sub>):  $R'_n(x) = (-1)^n Q'_n(1-x) \times (-1)$   
 $= (-1)^{n-1} n Q_{n-1}(1-x) = n R_{n-1}(x)$ .

