

Convergence du développement :

Exercice [12] 1°). $p+q=1 \Rightarrow (p+iq)(p-iq)=1$ ($u+vq=1 \Rightarrow \frac{1}{2}(u-v)(p+iq) + \frac{1}{2}(u+v)(p-iq)=1$)
 Or: $p^2+q^2=(p+iq)(p-iq)=(x+iy)^2(x-iy)^2=[(x^2-y^2)+2ixy][(x^2-y^2)-2ixy] \Rightarrow p+iq=(x+iy)^2(x-iy)$
 d'où: $p+iq = R(x+iy)^2$, $R \in \mathbb{C}$ et comme $p^2+q^2=(x^2+y^2) \Rightarrow R \bar{R}=1$ i.e. $R=e^{i\varphi}$ d'où:

$$p = (x^2-y^2) \cos \varphi - 2xy \sin \varphi \quad q = (x^2-y^2) \sin \varphi + 2xy \cos \varphi \quad (10)$$

2°). Comme $p+iq = e^{i\varphi}(x+iy)^2 \Rightarrow p'+iq' = 2e^{i\varphi}(x+iy) \Rightarrow p'^2+q'^2 = 4(x^2+y^2)$.

Puis: $p+iq = \frac{1}{3}e^{i\varphi}(x+iy)^3 + C$ ($C \in \mathbb{C}$); en prenant $C=0 \Rightarrow p^2+q^2 = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^3$ (3).

Problème: I. [14] 1° et 2°: $P_n = \sum_{k=0}^n C_n^k a_{n-k} x^k$ (4)

3°) $P'_n = \sum_{k=1}^n k C_n^k a_{n-k} x^{k-1} = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) C_n^{p+1} a_{n-p} x^p$ (en posant $p=k-1$).

$n C_{n-1}^p = \sum_{p=0}^{n-1} n C_{n-1}^p a_{n-p} x^p$ donc, il suffit de montrer: $(p+1) C_n^{p+1} = n C_{n-1}^p$ (immédiate) (6).

4°) Montrons, par récurrence, que l'on peut ainsi déterminer les polynômes (P_n) :

$P_0=1 \Rightarrow P_1 = X+a_1$, (a_1 constante d'intégration) $\Rightarrow P'_2 = 2X+2a_1 \Rightarrow P_2 = X^2+2a_1X+a_2$.

On suppose la propriété vraie à l'ordre n : $P_n = X^n + C_n^1 a_{n-1} X^{n-1} + \dots + C_n^n a_0$.

$P'_{n+1} = P'_n = \sum_{k=0}^n (k+1) C_n^{k+1} a_{n-k} x^k = \sum_{p=0}^n (p+1) C_{n+1}^{p+1} a_{n+1-p} x^p \Rightarrow P_{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^{p+1} a_{n+1-p} x^p + a_{n+1}$ c.q.f.d.

Les termes de la suite (P_n) sont les constantes d'intégration de la relation $P'_n = n P_{n-1}$. (11)

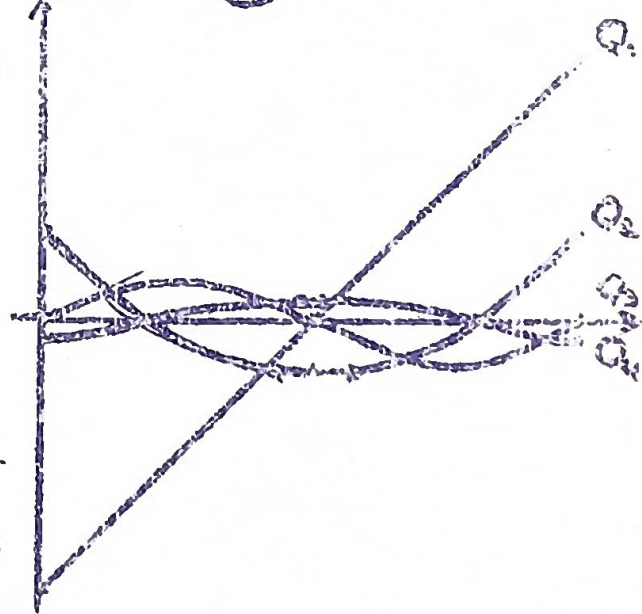
II. [15] 1°) Par intégrations successives et en déterminant la constante d'intégration par la condition (C_2) , on trouve:

Pour construire la suite Q_n , on utilise le I 4°). Les constantes d'intégration étant déterminées par (C_2) . (5)

2°) n°1 $(C_2) \Leftrightarrow Q_{n+1}(1) = Q_{n+1}(0)$ et $n=0$: $Q_1(1) = -Q_1(0)$. (3)

3°) a). On utilise la relation $Q'_n = n Q_{n-1}$ qui donne le signe de $Q'_n(x)$. (4)

$$\begin{aligned} Q_1 &= X - \frac{1}{2} \\ Q_2 &= X^2 - X + \frac{1}{6} \\ Q_3 &= X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \\ Q_4 &= X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$



Symétries constantes:
 n impair: symétrie / $\Omega(\frac{1}{2}, 0)$
 n pair: symétrie / $\mathcal{D}$: $x = \frac{1}{2}$.

3° b). On a: $R_0 = Q_0 = 1$ (6)

$R'_n = (-1)^n (-1) Q'_n(1-x) = (-1)^{n-1} n Q_{n-1}(x) = n R_{n-1}$ (C1).

$R_1(1) = -Q_1(0) = Q_1(1) = -R_1(0)$

et $n \geq 2$: $R_n(1) = (-1)^n Q_n(0) = (-1)^n Q_n(1) = R_n(0)$ (C3)

Or: $(C_3) \Leftrightarrow (C_2)$.

Donc, comme (R_n) vérifie les conditions C_0, C_1, C_2 et que la suite (Q_n) est définie, l'unicité de membre unique par ces trois conditions en a: $R_n = Q_n$ i.e. $Q'_n(x) \neq 0$ (C1) (ici permet bien de généraliser les symétries constantes). (7)

c). i) $n \geq 2p+1$: $Q_n(\frac{1}{2}) = (-1)^p Q_n(1-\frac{1}{2}) = -Q_n(\frac{1}{2}) \Rightarrow Q_n(\frac{1}{2}) = 0$

ii). $n \geq 3$, on sait que: $Q_n(1) = Q_n(0)$ (C3) et 3° b) $\Rightarrow Q_n(1) = (-1)^n Q_n(0)$ (8)

donc, si n est impair: $Q_n(1) = Q_n(0) = 0$
 $n=1$: $Q_1(1) = -Q_1(0) = \frac{1}{2}$