

Récurrente double: $P_n(x) = (x + \frac{1}{2}) P_{n-1}(x) - \frac{1}{16} P_{n-2}(x)$

$$\Rightarrow P_n(-x-1) = -(x + \frac{1}{2}) P_{n-1}(-x-1) - \frac{1}{16} P_{n-2}(-x-1) = (-1)^n \left[(x + \frac{1}{2}) P_{n-1}(x) - \frac{1}{16} P_{n-2}(x) \right] = (-1)^n P_n(x) \quad \text{c.q.f.d.}$$

En dérivant, on trouve: $P'_n(-x-1) = (-1)^{n-1} P'_n(x)$ (3)

Grâce à la relation (2) si $P_n(\alpha) = 0$, $P_n(-1-\alpha) = (-1)^n P_n(\alpha) = 0$. (6)

d). On substitue $-1/2$ à x dans (2) $\Rightarrow P_n(-1/2) = (-1)^n P_n(-1/2)$

$$\Rightarrow P_{2n+1}(-1/2) = 0 \quad \text{et on trouve de même, en utilisant la relation (3) que: } P'_{2n}(-1/2) = 0. \quad (3)$$

2°). a). $f_1(\theta) = -\frac{\cos 2\theta}{2}$ $f_2(\theta) = \frac{\cos 4\theta}{8}$ (3)

b) Montrons par récurrence que

$$f_n(\theta) = (-\cos^2 \theta + \frac{1}{2})^n \left(\frac{-1}{4} \right)^{n-1} \cos(2n-2)\theta - \frac{1}{16} \left(\frac{-1}{4} \right)^{n-2} \cos(2n-4)\theta$$

et on trouve bien la relation (4). (4)

c) Racines de P_n : $f_n(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{(2k+1)\pi}{4n}$

donc, les nombres $\alpha_k = -\cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n}$ sont racines de P_n .

Si on prend: $k \in [0, n-1]$, tous les α_k sont distincts. On a donc trouvé n racines à un polynôme de degré n , on les a toutes. (5)

d) $f'_n(\theta) = -2 \left(\frac{-1}{4} \right)^n 2n \sin(2n\theta) = P'_n(-\cos^2 \theta) \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$ (dérivée du fct.

d'où: $P'_n(-\cos^2 \theta) = g_n(\theta) = n \left(\frac{-1}{4} \right)^{n-1} \frac{\sin(2n\theta)}{\sin(2\theta)}$ composés

racines de P'_n : on procède comme au c) mais ici, il ne faut pas que $\sin 2\theta = 0$ d'où les racines de P'_n : $\beta_k = -\cos^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right)$, $k \in [1, n-1]$. (5)

e) $P_n(0) = f_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{4^n}$; $P_n(-1) = f_n(0) = 2 \cdot \left(\frac{-1}{4} \right)^n$

On a: $P'_n(-1) = \lim_{\theta \rightarrow 0} n \left(\frac{-1}{4} \right)^{n-1} \frac{\sin 2n\theta}{\sin 2\theta} = n^2 \left(\frac{-1}{4} \right)^{n-1}$ et $P'_n(0) = \frac{n^2}{4^{n-1}}$ grâce à (3).

$P_{2n}(-\frac{1}{2}) = f_{2n}(\frac{\pi}{4}) = \frac{2(-1)^n}{4^{2n}}$ (3)

f). $P_n(x) = (x + \frac{1}{2}) P_{n-1}(x) - \frac{1}{16} P_{n-2}(x)$: ceci est une suite récurrente double:

résolvante: $x^2 - (x + \frac{1}{2})x + \frac{1}{16} = 0$

$\Delta = x^2 + x < 0$ (car $-1 < x < 0$) $\Rightarrow x = \frac{2x+1 \pm i\sqrt{-x^2-x}}{4}$

d'où la formule (valable aussi si $x=0$ ou $x=-1$ par continuité). (5)

(On retrouve alors: $P_n(0) = \frac{2}{4^n}$, $P_n(-1) = 2 \left(\frac{-1}{4} \right)^n$, $P_n(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4^n} (i^n + (-i)^n)$).