

$$(C_3): R_n(0) = (-1)^n Q_n(1) = (-1)^n Q_n(0) = R_n(1) \text{ c.q.f.d.}$$

Comme la suite Q_n est déterminée de manière unique: $Q_n = R_n$, i.e.:

$$\boxed{Q_n(x) = (-1)^n Q_n(1-x)} \text{ (ce qui confirme les symétries constatées),}$$

$$c). n \text{ impair: } Q_n(1/2) = -Q_n(1/2) \Rightarrow \underline{Q_n(1/2) = 0.}$$

$$Q_n(0) = Q_n(1) \text{ et } Q_n(0) = -Q_n(1) \Rightarrow \underline{Q_n(0) = Q_n(1) = 0 \text{ (} n \geq 3 \text{)}}$$

$$L9. a). \text{On a: } Q_n(x) = Q_n(0) + x Q_n'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} Q_n^{(n)}(0)$$

$$\text{et } Q_n(1+x) = Q_n(1) + x Q_n'(1) + \dots + \frac{x^n}{n!} Q_n^{(n)}(1).$$

$$\text{Or: } Q_n'(0) = n Q_{n-1}(0) \text{ et plus généralement: } Q_n^{(h)}(x) = \frac{n!}{(n-h)!} Q_{n-h}(x).$$

donc, $Q_n^{(h)}(0) = Q_n^{(h)}(1)$ sauf pour $h = n-1$: en effet:

$$Q_n^{(n-1)}(x) = n! Q_1(x) \text{ donc, } Q_n^{(n-1)}(1) = \frac{n!}{2} \text{ et } Q_n^{(n-1)}(0) = -\frac{n!}{2}.$$

$$\text{d'où: } \boxed{Q_n(1+x) - Q_n(x) = n x^{n-1}}.$$

$$b). \text{On a: } \left. \begin{aligned} Q_{n+1}(p) - Q_{n+1}(p-1) &= (np-1)^n \\ Q_{n+1}(2) - Q_{n+1}(1) &= n+1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{(n+1)S_n = Q_{n+1}(p) - Q_{n+1}(1)}.$$

$$n=1: 2S_1 = Q_2(p) - Q_2(1) = p^2 - p \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} p(p-1).$$

$$n=2: 3S_2 = Q_3(p) - Q_3(1) = \frac{p(p-1)(2p-1)}{6} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{6} p(p-1)(2p-1).$$

$$n=3: 4S_3 = Q_4(p) - Q_4(1) = p^2(p-1)^2 \Rightarrow S_3 = \frac{1}{4} p^2(p-1)^2.$$

$$n=4: 5S_4 = Q_5(p) - Q_5(1) = \int_1^p Q_5'(x) dx = 5 \int_1^p Q_4(x) dx = 5 \left[\frac{p^5-1}{5} - \frac{p^4-1}{2} + \frac{p^3-1}{3} - \frac{p-1}{30} \right]$$

$$S_4 = \frac{p-1}{30} p (6p^2 - 9p + 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{S_4 = \frac{p(p-1)(2p-1)(3p^2-6p-1)}{30}}.$$

C. a). En examinant les termes de plus haut degré, on a nécessairement, $\underline{a_n = (-1)^n}.$

$$b). \text{On sait que: } Q_n(1-x) = (-1)^n Q_n(x) \Rightarrow Q_n(1+x) = (-1)^n Q_n(-x) \text{ (B3°b)}$$

et on vient de démontrer au B.4° a que $Q_n(1+x) = Q_n(x) + n x^{n-1}$ d'où:

$$\boxed{Q_n(-x) = (-1)^n [Q_n(x) + n x^{n-1}]}.$$

D. a). De même, en examinant les termes de plus haut degré, on a:

$$\underline{\beta_n = 2^{-n+1}}.$$

$$b). \text{Par récurrence: } n=0: 1+1=2 (!) \quad n=1: x - \frac{1}{2} + x = 2x - \frac{1}{2}$$

$$\text{(HR): vrai à l'ordre } n: Q_n(x) + Q_n(x+1/2) = 2^{-n+1} Q_n(2x).$$

$$\text{en intégrant, on trouve: } Q_{n+1}(x) + Q_{n+1}(x+1/2) = 2^{-n} Q_{n+1}(2x) + d$$

où d est une constante d'intégration.

$$2 \text{ cas: si } n+1 \text{ est impair: on prend } x=0: Q_{n+1}(0) + Q_{n+1}(1/2) = 0 \Rightarrow d=0.$$

$$\text{si } n+1 \text{ est pair, on intègre à nouveau } \Rightarrow Q_{n+2}(x) + Q_{n+2}(x+1/2) = 2^{-n-1} Q_{n+2}(2x) + d x + \beta$$

$$n+2 \text{ est impair, on prend } x=0 \Rightarrow \beta=0 \text{ puis } x=\frac{1}{2} \Rightarrow d=0 \text{ c.q.f.d.}$$

$$\text{on a bien: } \boxed{Q_n(x) + Q_n(x+1/2) = 2^{-n+1} Q_n(2x)}.$$

c) Dans la relation ci-dessus, on prend $x=0$ et on trouve:

$$\boxed{Q_n(1/2) = (2^{-n+1} - 1) Q_n(0)}.$$