

4°) a). $Q_n(x) = Q_n(0) + x Q_n'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} Q_n^{(n)}(0)$ $\left\{ \begin{array}{l} Q_n(0) = Q_n(1) \quad (n \geq 2) \\ Q_n'(0) = (n-1)(n-2)\dots(n-3)Q_n'(1) \end{array} \right.$
 et $Q_n(1+x) = Q_n(1) + x Q_n'(1) + \dots + \frac{x^n}{n!} Q_n^{(n)}(1)$ $\left\{ \begin{array}{l} Q_n'(1) = (n-1)(n-2)\dots(n-3)Q_n'(0) \\ Q_n^{(k)}(1) = Q_n^{(k)}(0) \end{array} \right.$
 $Q(1+x) - Q_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} [Q_n^{(n+1)}(1) - Q_n^{(n+1)}(0)]$ $\Leftrightarrow n \geq 2: Q_n^{(k)}(0) = Q_n^{(k)}(1)$
 or: $Q_n^{(k)}(0) = n! Q_k(x) \Rightarrow [Q_n(1+x) - Q_n(x) = n x^{n+1}]$ (5)

b). $\frac{1}{n} [Q_n(2) - Q_n(0)] = 1^{n-1}$
 $\frac{1}{n} [Q_n(3) - Q_n(0)] = 2^{n-1}$
 $\frac{1}{n} [Q_n(p+1) - Q_n(0)] = (p-1)^{n-1}$
 $\Rightarrow 1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (p-1)^{n-1} = \frac{1}{n} [Q_n(p+1) - Q_n(0)]$
 $\Rightarrow 1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n = \frac{1}{n+1} [Q_{n+1}(p+1) - Q_{n+1}(0)]$

$n=2: 1^2 + \dots + (p-1)^2 = \frac{1}{3} [p^3 - 3p^2 + 3p - 1] = \frac{1}{6} p(p-1)(2p-1)$ cas $n=1$: immédiat.
 $n=3: 1^3 + \dots + (p-1)^3 = \frac{1}{4} [p^4 - 2(p^3) + (p-1)^3] = \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^2$
 $n=4: 1^4 + \dots + (p-1)^4 = \frac{1}{5} [p^5 - \frac{5}{2}p^4 + \frac{5}{3}p^3 - \frac{1}{6}p^2] = \frac{1}{30} p(p-1)(2p-1)(3p^2-3p-1)$ (5)

III.

a). En examinant les termes de degré n , on obtient nécessairement $d_n = (-1)^n$. (2)

b). $-x = \ln(1+x)$ donc:

$Q_n(-x) = Q_n(1 - (1+x)) \stackrel{3^\circ)}{=} (-1)^n Q_n(1+x) \stackrel{4^\circ)}{=} (-1)^n [Q_n(x) + n x^{n-1}]$. (6)

IV.

a) Les termes de degré n ont pour coefficient:

à gauche: 2 à droite: $\beta_n \cdot 2^n \Rightarrow \beta_n = 2^{n+1}$. (2)

b). Récurrence: vrai à l'ordre 0 ($\frac{1}{2}$) et à l'ordre 1.

(H) ordre n : $Q_n(x) + Q_n(x + \frac{1}{2}) = 2^{-n+1} Q_n(2x)$.

en multipliant par $n+1 \Rightarrow Q_{n+1}'(x) + Q_{n+1}'(x + \frac{1}{2}) = 2^{-n+1} Q_{n+1}'(2x)$.

en intégrant: $Q_{n+1}(x) + Q_{n+1}(x + \frac{1}{2}) = 2^{-n} Q_{n+1}(2x) + c$.

Il faut montrer maintenant que $c=0$.

En prenant $x=0$, on a: $c = Q_{n+1}(\frac{1}{2}) + Q_{n+1}(0) - 2^{-n} Q_{n+1}(0)$

Donc, si $n+1$ est impair: $Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow c=0$.

Si $n+1$ est pair; on intègre une deuxième fois:

$\Rightarrow Q_{n+1}(x) + Q_{n+1}(x + \frac{1}{2}) = 2^{-n-1} Q_{n+2}(2x) + (n+2).cx + d$. (6)

en prenant $x=0$, on trouve $d=0$

et $x = \frac{1}{2}$: $Q_{n+1}(\frac{1}{2}) + Q_{n+1}(1) = 2^{-n-1} Q_{n+2}(1) + (n+2).c \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow c=0$ c.q.f.d.

c) avec $x=0$, on a: $Q_n(\frac{1}{2}) = -\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) Q_n(0)$.