

I. Décomposer sur $\mathbb{R}$: $f = \frac{9X - 14}{(X-5)(X^2+X+1)^3}$

6

II. Décomposer sur $\mathbb{C}$: $g = \frac{X^2 + 3X - 1}{X^5 + X^4 + X^3 - X^2 - X - 1}$

4

III. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$: $R = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{X(X+1)\dots(X+k)}$; chercher

4

la décomposition de R sur $\mathbb{R}$; en déduire : $R = \frac{1}{X+n}$.

IV. Soit P_n un polynôme de degré $\leq n-1$: décomposer la fraction rationnelle $\frac{P_n}{X^n - 1}$ (on exprimera le coefficient a_k de $\frac{1}{X - x_k}$ en fonction de x_k et de $P'_n(x_k)$ où $x_k = \exp(i \frac{k\pi}{n})$).

6

Application : simplifier les expressions :

i). $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{X - x_k}$

ii). $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^2}{X - x_k}$

iii). $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^2}{(X - x_k)^2}$

$$f = \frac{1}{31^2(X-5)} + \frac{-X+3}{(X^2+X+1)^3} + \frac{-X-6}{31(X^2+X+1)^2} + \frac{-X-6}{31^2(X^2+X+1)}$$

$$g = \frac{1}{X-1} + \frac{-4-35j}{27(X-j)} - \frac{2j^2}{9(X-j)^2} + \frac{-4-35j^2}{27(X-j^2)} - \frac{2j}{9(X-j^2)^2}$$

IV. $\frac{P_n}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k P_n(x_k)}{n(X - x_k)}$

i). $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{X - x_k} = \frac{1}{X^n - 1}$

ii). $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^2}{X - x_k} = nX + \frac{X}{X^n - 1} = \frac{nX^{n+1} + X}{X^n - 1}$

iii). $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^2}{(X - x_k)^2} = 2 - n + \frac{(n+1)X^n - 1}{(X^n - 1)^2}$