

EXERCICE 1:

Soient les 2 suites réelles (x_n) et (y_n) vérifiant : $x_0 = y_0 = 0$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n}$, $y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$.

1°) a) Montrer que l'on peut ainsi définir ces 2 suites.

b) Déterminer leurs limites éventuelles. Montrer qu'il n'y a qu'une seule limite possible pour (x_n) ainsi que pour (y_n) .

2°) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : |x_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |y_n - 3|$ et $|y_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3} |x_n - 2|$

b) En déduire que (x_n) et (y_n) sont convergentes.

3°) a) Montrer que : $x_{n+1} - x_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} + x_n}$; trouver une relation comparable avec $y_{n+1} - y_n$.

b) Prouver qu'aucune des suites (x_n) et (y_n) n'est monotone.

c) Montrer que : $\forall n \geq 1 : x_{4n-1} < x_{4n} < 2 < x_{4n-2} < x_{4n-3}$ (la suite (x_n) n'est pas oscillante). Trouver des inégalités semblables avec (y_n) .

EXERCICE 2:

Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels où $a_i \geq 1$. On considère les polynômes $P_n(X) = a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$.

1°) En étudiant la fonction : $P_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto P_n(x)$, montrer que l'équation $P_n(x) = 1$ admet une racine > 0 : u_n . Montrer que la suite (u_n) est décroissante et admet une limite.

2°) Exemples :

a) $a_n = n$: Si $Q_n(X) = 1 + X + \dots + X^n$, montrer que $P_n(X) = X Q'_n(X)$.

En déduire une expression de $P_n(x)$. Calculer u_2 , en déduire que :

$\lim_{n \rightarrow \infty} n(u_n)^n = 0$. Montrer alors que : $P_n(u_n) = 1 = \frac{u_n}{(1-u_n)^2} + o(1)$ ($n \rightarrow \infty$)

En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

b) $a_n = n!$: En utilisant la formule : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$