

PROBLEME 1:

Dans le problème, K désignera le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$. On considère l'application linéaire f de $K[X]$ dans $K[X]$ définie par: $f(P) = X(X-1)P'' - \alpha X P' + \beta P$.

I. 1°) Montrer que la restriction de f à $K_n[X]$ est un endomorphisme.

2°) Calculer α et β pour que l'on ait les 2 propriétés suivantes:

i) $f(X) = 2X$

ii) $\exists P \in K[X], \deg P = 2$ vérifiant: $f(P) = 3P$.

Existe-t-il des polynômes de $K[X]$ tels que $\deg f(P) < \deg P$?

On conserve par la suite les valeurs de α et β calculées.

II. 1°) Si $\deg P = R$, calculer la valeur que doit prendre $\lambda_R \in K$ pour que l'on ait $f(P) = \lambda_R P$. $R \neq 2$

2°) a) Montrer que, $\forall R \in [0, n]$, il existe un unique polynôme P_R unitaire de degré R vérifiant $f(P_R) = \lambda_R P_R$; vérifier que la relation permettant de calculer les coefficients de P_R est donnée par: $\forall R \leq R-1: a_R(R^2 - 2R + 2R - R^2) = a_{R+1}R(R+1)$

b) Prouver que les polynômes P_R forment une base de $K_n[X]$.

3°) a) Calculer P_2, P_3 et P_4 .

b) Montrer que les signes des coefficients de P_R sont alternés; que peut-on en déduire sur le signe des racines réelles de P_R ?

c) Montrer, à l'aide d'un raisonnement, que P_4 n'a pas de racines rationnelles autres que 0. Chercher les racines de P_4 .

d) Si on appelle x_1, x_2 et x_3 les racines non nulles de P_4 , calculer $\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}\right)$. Montrer que, pour $R \geq 3$, 1 est racine double de P_R .