

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[-1, +1]$.

On considère la fonction $M : u \in \mathbb{R} \mapsto M(u) = \sup_{x \in [-1, +1]} (f + ug)(x)$

On définit $E(u)$ pour $u \in \mathbb{R}$ par :

$$E(u) = \{x \in [-1, +1] : (f + ug)(x) = M(u)\}$$

I. Etude d'exemples :

1°) Déterminer explicitement M et $E(u)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; $g(x) = x$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2$; $g(x) = x^2$

On montrera que dans b), M n'est pas dérivable en $u = 1$.

Dire pourquoi, $\forall u \in \mathbb{R} : E(u) \neq \emptyset$.

2°) Soit $g(x) = x$, chercher f telle que :

a) f : dérivable sur $[-1, +1]$

b) $\forall u \in]-\pi/2, +\pi/2[: \sin u \in E(u)$

c) $f(0) = 0$

(Une primitive de la fonction $\text{Arcsin } x$ est : $x \text{ Arcsin } x + \sqrt{1-x^2}$)

Montrer que f est unique. Déterminer M . Etudier la dérivabilité de M . Chercher enfin $E(u)$.

II. On revient au cas général

1°) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$: on prend $x \in E(u)$ et $y \in E(v)$. Montrer alors les inégalités : $(v-u)g(x) \leq M(v) - M(u) \leq (v-u)g(y)$

2°) Montrer que M est continue.

3°) Soit α une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, +1]$

telle que : $\forall u \in \mathbb{R} : \alpha(u) \in E(u)$.

On pose $h(u) = g \circ \alpha(u)$. Montrer que : si $u < v < w$ alors, $\forall y \in E(v) : h(u) \leq g(y) \leq h(w)$ (on en déduira que h est croissante).