

PROBLEME : Etude de la suite $u_n = E_0 \sqrt{2 + E_1 \sqrt{2 + \dots + E_n \sqrt{2}}} \quad E_i = \pm 1$

Soit $(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ définie par: $P_0(X) = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}: P_{n+1}(X) = P_n^2(X) - 2$.

1°) Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4 . Préciser, pour $n \in \mathbb{N}$, le terme dominant de P_n ainsi que son terme de plus bas degré.

2° a) Montrer que les termes de la suite (u_n) vérifient: $P_{n+1}(u_n) = 0$ et: $\forall p \in [0, n]: P_p(u_n) = E_p \sqrt{2 + \dots + E_n \sqrt{2}}$. On note ① les relations: $P_{n+1}(u_n) = 0$

$$\forall p \in [0, n]: E_p P_p(u_n) \geq 0$$

b) Montrer que si (v_n) vérifie ①, alors $v_n = u_n$. Quelles sont les racines de P_n ?

3° a) Vérifier que $P_{n+1}(2 \cos \theta) = 2 \cos(2^{n+1} \theta)$

b) En déduire que les racines de P_{n+1} sont: $x_k = 2 \cos\left(\frac{2k+1}{2^{n+2}} \cdot \pi\right), k \in [0, 2^{n+1}]$

4° a) Dire pourquoi $\exists k_n \in [0, 2^{n+1}[$ tel que: $u_n = x_{k_n}$.

b) Soit $k_n = \alpha_{n+1} + \alpha_n \cdot 2 + \dots + \alpha_1 \cdot 2^n = \overline{\alpha_{n+1} \alpha_n \dots \alpha_1}$, l'écriture de k_n en base 2 ($\forall i \in [1, n+1], \alpha_i \in \{0, 1\}$). Montrer que: $P_p(u_n) = 2 \cos\left(\frac{2k_n + 1}{2^{n+2}} \pi\right)$

Si $a_p = \frac{\alpha_{p+1}}{2} + \dots + \frac{\alpha_{n+1}}{2^{n-p+1}} + \frac{1}{2^{n-p+2}}$, montrer que $a_p \in [0, 1[$.

En déduire que $P_p(u_n) (-1)^{\alpha_p + \dots + \alpha_{n+1}} \geq 0$ et que $\alpha_p \leq \frac{1 - E_p}{2}$. $\alpha_0 = 0$

Calculer $\cos \frac{5\pi}{32}$.

5° a) Si $\theta \in]0, \pi[$, on sait que: $\frac{\theta}{\pi} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{2^i}$. Montrer que la suite (u_n) obtenue en prenant $E_p = (-1)^{\alpha_p + \dots + \alpha_{n+1}}$ a pour limite $2 \cos \theta$.

En déduire que: $\forall x \in [-2, +2], \exists (u_n): x = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

b) Trouver les suites (u_n) pour $x = 2, 1, 0, \dots$

Idee du barème:

E 1: 5 : 1° 1,5 2° 1 3° 2,5

E 2: 5,5: 1° 2 2° a) 2,5 b) 1

P : 9,5 : 1° 1,5 2° 2 3° 1,5 4° 2,5 5° 2