

## PROBLEME 2 :

Soient  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}_+$  tels que l'on ait :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : |f(u+v) - f(u) - f(v)| \leq a.$$

I. 1°) Montrer par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  que :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, |f(nu) - nf(u)| \leq (n-1) \cdot a \quad (1)$$

2°. Dans toute la suite, on suppose  $f$  bornée sur  $[0, 1]$  et on pose :

$$\mu = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|. \text{ Montrer qu'il existe 2 constantes } b \text{ et } c \text{ que l'on}$$

$$\text{explicitera telles que l'on ait : } \forall x \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| \leq bx + c \quad (2)$$

(choisir  $n$  pour que :  $\frac{x}{n} \in [0, 1]$ ).

3°. Soient  $u$  et  $x$  tels que :  $1 \leq u \leq x$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$mu \leq x \leq (m+1)u : \text{montrer que : } |f(x) - mf(u) - f(x-mu)| \leq ma \quad (3)$$

II. 1°. On reprend les notations du I. 3° : en utilisant (1), (3)

et la remarque :  $\frac{1}{u} \leq 1$ , montrer que :

$$\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}_+^*, \text{ tel que : } \forall (u, x) \in \mathbb{R}_+^2 : 1 \leq u \leq x \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(u)}{u} \right| \leq \frac{\alpha_0 u}{x} + \frac{\alpha}{u} \quad (4)$$

En déduire qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que :

$$\forall (u, x) \in \mathbb{R}_+^2, 1 \leq u \leq \sqrt{x} \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(u)}{u} \right| \leq \frac{\alpha}{u} \quad (5)$$

2°. Soient  $h_1$  et  $h_2$  les fonctions définies pour  $x \geq 1$  par :

$$h_1(x) = \sup_{1 \leq u \leq \sqrt{x}} \frac{f(u) - \alpha}{u}, \quad h_2(x) = \inf_{1 \leq u \leq \sqrt{x}} \frac{f(u) + \alpha}{u} \text{ montrer les inégalités :}$$

$$h_1(x) \leq \frac{f(x)}{x} \leq h_2(x), \quad h_1(x) \geq \frac{f(\sqrt{x}) - \alpha}{\sqrt{x}}, \quad h_2(x) \leq \frac{f(\sqrt{x}) + \alpha}{\sqrt{x}} \quad (6)$$

3°) Montrer que la fonction  $h_2$  est décroissante et que  $h_1$  est croissante. À l'aide des inégalités (6), en déduire que, lorsque  $x$  tend vers l'infini,  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  et  $\frac{f(x)}{x}$  ont une même limite que l'on notera  $\ell$ .

4°) En déduire enfin que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+ : |f(x) - \ell x| \leq a$ .