

Exercice 1 : 22

1° a) Il faut montrer par récurrence que x_n existe et $y_n < 7$.
 vrai à l'ordre 0 ; montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: $x_n = \sqrt{7 - y_{n-1}} < 7$.
 donc, $y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} < \sqrt{7 + 7} < 7$ et $7 - y_n > 0 \Rightarrow x_{n+1}$ existe c.q.f.d. $\leftarrow (3)$

b) On a: $x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}$ et $y_{n+2} = \sqrt{7 + \sqrt{7 - y_n}}$. Soient x et y les limites de x_n et y_n , alors: x et y sont solutions de: $x^2 = 7 - y$ et $y^2 = 7 + x$: avec $x > 0$ et $y > 0$: intersection de 2 paraboles; une seule solution est valable, c'est le couple $(2, 3)$ $\boxed{x=2, y=3}$. $\leftarrow (5)$

2° a) $x_{n+1} - 2 = \frac{7 - y_n - 4}{\sqrt{7 - y_n} + 2} \Rightarrow |x_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |y_n - 3|$; de même, $|y_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3} |x_n - 2|$ $\leftarrow (2)$

b) on en déduit que: $|x_{n+2} - 2| \leq \frac{1}{6} |x_n - 2|$ d'où: $|x_{2p} - 2| \leq \frac{1}{6^p} |x_0 - 2|$
 et $|x_{2p+1} - 2| \leq \frac{1}{6^p} |x_1 - 2|$ et donc: $|x_n - 2| \leq \frac{2}{6^{[n/2]}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. $\leftarrow (2)$

comme $y_n = \sqrt{7 + x_n}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 3$

3° a) $x_{n+1}^2 - x_n^2 = y_{n-1} - y_n$ d'où le résultat; de même, on a: $y_{n+1}^2 - y_n^2 = x_{n-1} - x_{n-1}$ $\leftarrow (2)$

b) $\text{signe}(x_{n+1} - x_n) = \text{signe}(y_{n-1} - y_n) = \text{signe}(x_{n-2} - x_{n-1})$ donc, la quantité $x_{n+1} - x_n$ ne garde pas un signe constant $\Rightarrow (x_n)$ n'est pas monotone.
 Il en est de même pour (y_n) . $\leftarrow (3)$

c) On voit que: $x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}$; en multipliant par les expressions conjuguées, on a: $\text{signe}(x_{n+2} - 2) = \text{signe}(3 - \sqrt{7 + x_n}) = \text{signe}(2 - x_n)$.
 D'autre part $x_1 = \sqrt{7} > 2$ et $x_2 = \sqrt{7 - \sqrt{7}} > 2$ avec $x_2 < x_1 \Rightarrow x_3 < 2$ et $x_4 < 2$
 ainsi que $x_3 < x_4$ (à cause du 3° b). Par récurrence, on obtient le résultat.
 De même, on avait: $\text{signe}(y_{n+2} - 3) = \text{signe}(y_n - 3)$ et par récurrence. $\leftarrow (2)$

$y_{4n} < y_{4n+1} < 3 < y_{4n-1} < y_{4n-2}$. $\leftarrow (3)$

Exercice 2.

1° $\forall x \in \mathbb{R}^+, P'_n(x) > 0$ $\leftarrow (2)$

$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & u_n & +\infty \\ \hline P_n & 0 & 1 & +\infty \end{array} \Rightarrow \exists u_n > 0: P_n(u_n) = 1$

Calculons $P_n(u_{n-1}) = P_{n-1}(u_{n-1}) + a_n(u_{n-1})$
 ≥ 1 . $\leftarrow (4)$

$\Rightarrow u_{n-1} \geq u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge.

2° a) $Q_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \Rightarrow P_n(x) = \frac{n x^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$ $\leftarrow (3)$

$u_2 = \frac{1}{2}$ donc, $\forall n \geq 2: u_n \leq \frac{1}{2}$. $\leftarrow (2)$

et par conséquent: $n(u_n)^n \leq n\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} n(u_n)^n = 0$. On a alors: $1 = \frac{u_n}{(1-u_n)^2} + \underbrace{n(u_n)^n \frac{u_n^2}{(1-u_n)^2} - (n+1)u_n^{n+1} \frac{1}{(1-u_n)^2}}_{= o(1)}$ $\leftarrow (3)$

Soit u la limite de (u_n) , on a alors: $\frac{u}{(1-u)^2} = 1$ et $u > 0$.

donc: $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$ $\leftarrow (2)$