

Problème 1.

I. 1°. Il suffit de montrer que, si $\deg P \leq n$ alors $\deg f(P) \leq n$ (évident!).

2°. i) nous donne: $\beta - \alpha = 2$ et ii) $\beta - 2\alpha = 1$, $\alpha(\beta - \alpha - 3) = 2$ $b \neq 3$
 si on pose $P = X^2 + \alpha X + b$. d'où: $\alpha = 1, \beta = 3$, $\alpha = -2$, b quelconque.
 Calculons le terme de plus haut degré de $f(P)$ si $\deg P = n$:

$X(X-1)P^n \rightarrow n(n-1)X^n$; $-XP' \rightarrow -nX^n$ et $3P \rightarrow 3X^n \Rightarrow (n^2 - 2n + 3)X^n$
 or, $n^2 - 2n + 3$ ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$ donc, $\deg f(P) = \deg P$.

II. 1°. En utilisant le résultat du I. 2°, on trouve $A_{P_k} = k^2 - 2k + 3$.

2°. a). On écrit P_k sous la forme: $P_k = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_1X + a_0$, puis on écrit l'égalité des coef. de degré k dans $f(P_k)$ et dans $A_{P_k}P_k$ et l'on trouve:
 $a_k(k^2 - 2k + 2k - k^2) = a_{k+1}k(k+1)$; ce qui, pour $k^2 - 2k + 2k - k^2 \neq 0$ permet de déterminer a_k connaissant a_{k+1} . Or: $k^2 - 2k + 2k - k^2 = (k - k)(k + k - 2)$.

$k < k$, dans quel cas a-t-on $k + k - 2 = 0$: i.e. $k = 2 - k$ et $k \leq k - 1 \Rightarrow k = 2$.
 Donc, pour $k \neq 2$, on peut déterminer de manière unique P_k .

b). Il suffit de raisonner sur les degrés.

3°. a). On peut choisir $P_2 = X^2 - 2X$, on aura $P_3 = X(X-1)^2$
 et $X^4 - 12/5 X^3 + 9/5 X^2 - 2/5 X = P_4$.

b). Il suffit de montrer que $k^2 - 2k + 2k - k^2 < 0$ or: $k - k < 0$ et pour $k \geq 2$: $k + k - 2 \geq 0$ c.q.f.d. ($k = 1 \Rightarrow P_1 = X \dots$). Les racines réelles de P_k sont positives.

c). $P_4 = \frac{X}{5}(5X^3 - 12X^2 + 9X - 2)$ deux racines évidentes: 0 et 1.
 $P_4 = \frac{X}{5}(X-1)^2(5X-2)$ d'où les racines: 0, 1, 2/5.

d). Cherchons les solutions de $f(P_k) = A_{P_k}P_k$ sous la forme: $P_k = (X-1)^2 Q_k$.
 Après simplifications, on trouve: $(k^2 - 2k + 3)Q_k = 3Q_k + 3XQ_k' + X(X-1)Q_k'$.
 Avec un raisonnement semblable à celui du 2°. a), on montre que les Q_k existent et sont uniques, et comme il y a unicité des P_k , on a bien:
 $P_k = (X-1)^2 Q_k$ c.q.f.d.

Problème 2

I. 1°. $n=1$ évident! Par récurrence: (H R): $|f((n-1)u) - (n-1)f(u)| \leq (n-2)a$
 or on a: $f(nu) - nf(u) = (f(nu) - f((n-1)u) - f(u)) + (f((n-1)u) - (n-1)f(u))$
 d'où: $|f(nu) - nf(u)| \leq a + (n-2)a = (n-1)a$, c.q.f.d.

2°. On peut prendre $n = [x] + 1 \leq x + 1$: $|f(x) - nf(\frac{x}{n})| \leq (n-1)a$.
 $|f(x)| \leq |f(x) - nf(\frac{x}{n})| + n|f(\frac{x}{n})| \leq (n-1)a + n\mu \leq 2.a + (x+1)\mu = (2a + \mu)x + \mu$