

I. 1°) [15]

a) $f(x) = (1-x^2)^u$: $f'(x) = -2ux(1-x^2)^{u-1}$; $f''(x) = -2u(1-x^2)^{u-1} + 4u^2x^2(1-x^2)^{u-2}$

On cherche à déterminer que pour $x = \frac{1}{\sqrt{1+u}}$ $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0$

d'où $E(u) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+u}} \right\}$ et $H(u) = \sqrt{1+u}$ ← 6

b) $h(x) = x^4 + (u-2)x^2$: paire $\Rightarrow$ étude sur $[0, 1]$

$h'(x) = 4x[2x^2 + (u-2)]$

si $u > 2$: $\forall x \in [-1, +1]$ $h'(x) \geq 0$

si $u \leq 2$: $h'(x) < 0$ pour $x < \sqrt{\frac{2-u}{2}}$

on : $\sqrt{\frac{2-u}{2}} \geq 1 \Leftrightarrow u \leq 0 \Rightarrow 3 \text{ cas}$

Résultats :

u	u < 1	u = 1	u > 1
H(u)	0	0	u-1
E(u)	{0}	{1, 0, -1}	{1, -1}

← 7

H est dérivable en 1 car : $H'_d(1) = 1$ et $H'_g(1) = 0$

$E(u) \neq \emptyset$ car $h \in \mathcal{C}([-1, +1], \mathbb{R})$, donc h est bornée et atteint ses bornes $\Rightarrow \exists x \in E(u)$

2°) [20]

$u \in]-\pi/2, +\pi/2[\Rightarrow \sin u \in]-1, +1[$: $\sin u$ est un extremum et u n'est pas une borne de l'intervalle $\Rightarrow (f+g)'(\sin u) = 0$ i.e. $\forall u \in]-\pi/2, +\pi/2[$ $f'(\sin u) = -u \Leftrightarrow$

$\forall x \in]-1, +1[$ $f'(x) = -\text{Arcsin } x$

$\Rightarrow \forall x \in]-1, +1[$: $f(x) = -x \text{Arcsin } x - \sqrt{1-x^2} + C$ $f(0) = 0 \Rightarrow C = 1$ et on prolonge f par continuité en +1 et -1 $\Rightarrow f(x) = -x \text{Arcsin } x - \sqrt{1-x^2} + 1$ ← 5

Réciproque : il faut montrer que f vérifie bien a, b, c : a et c évident

Étudions : $h(x) = -x \text{Arcsin } x - \sqrt{1-x^2} + 1 + ux$: $h'(x) = -\text{Arcsin } x + u$

$u \in]-\pi/2, -\pi/2[$

x	-1	$\sin u$	+1
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$1-u-\pi/2$	$1-\cos u$	$1+u-\pi/2$

$u > \pi/2$

x	-1	+1
$h'(x)$	+	+
$h(x)$	$1-u-\pi/2$	$1+u-\pi/2$

$u \leq \pi/2$

x	-1	+1
$h'(x)$	+	-
$h(x)$	$1-u-\pi/2$	$1+u-\pi/2$

Vérifie b) ← 5

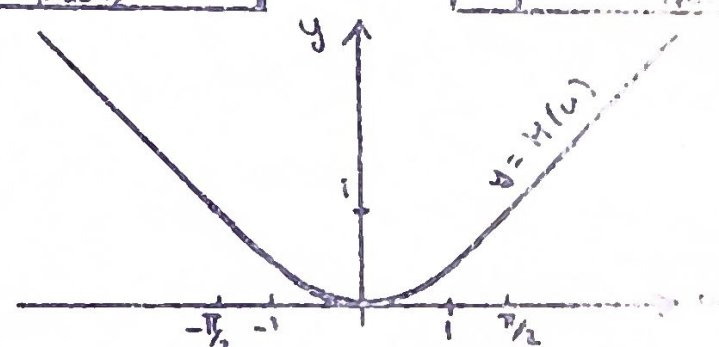
Résultats :

u	$u \leq -\pi/2$	$-\pi/2 < u < \pi/2$	$\pi/2 \leq u$
H(u)	$1-u-\pi/2$	$1-\cos u$	$1+u-\pi/2$
E(u)	{-1}	{sin u}	{+1}

← 5

← 2

H(u) est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. ← 2



II 1°) [5] $H(u) = f(x) + u g(x) \geq f(y) + u g(y)$
 $H(v) = f(y) + v g(y) \geq f(x) + u g(x)$
 $\Rightarrow H(v) - H(u) \geq (v-u) g(x)$

de même pour l'autre inégalité, d'où : $(v-u) g(x) \leq H(v) - H(u) \leq (v-u) g(y)$

2°) [4] $g \in \mathcal{C}([-1, +1], \mathbb{R})$ donc, g est bornée : on pose $\|g\| = A$, donc, grâce au 1°, on a

$|H(v) - H(u)| \leq A|v-u|$, pour $\epsilon > 0$, on prendra $\eta = \epsilon/A \Rightarrow H$ continue sur $\mathbb{R}$ (et même $\mathbb{C}$)