

$$b) 1 = P_n(u_n) \geq n! (u_n)^n \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad \leftarrow (1)$$

Problème:

$$1^\circ) P_1 = X^2 - 2; P_2 = X^4 - 4X^2 + 2; P_3 = X^8 - 8X^6 + 20X^4 - 16X^2 + 2$$

$$P_4 = X^{16} - 16X^{14} + 104X^{12} - 352X^{10} + 660X^8 - 672X^6 + 336X^4 - 64X^2 + 2 \quad \leftarrow (2)$$

Par récurrence: le terme dominant de P_n est X^{2^n} et $P_n(0) = 2$ (sauf pour $n=0$ et $n=1$)

2°) Montrons par récurrence sur p ($p \leq n$) que $P_p(u_n) = \varepsilon_p \sqrt{2 + \varepsilon_{n-1} \sqrt{2}}$

soit d'ordre 0; calculons $P_{p+1}(u_n) = 2 + \varepsilon_{p+1} \sqrt{2 + \dots + \varepsilon_n \sqrt{2}} - 2$ vérifié.

d'où $P_n(u_n) = \varepsilon_n \sqrt{2}$ et donc $P_{n+1}(u_n) = 0$. (3)

b) Réciproquement: $P_{n+1}(v_n) = P_n'(v_n) - 2 \Rightarrow P_n(v_n) = \pm \sqrt{2} = \varepsilon_n \sqrt{2}$ et par récurrence

descendante: $P_p(v_n) = \varepsilon_p \sqrt{2 + \dots + \varepsilon_n \sqrt{2}}$ d'où: pour $p=0$, $v_n = u_n$

Les racines de P_n sont obtenues en donnant les valeurs ± 1 aux ε_i , et chaque

choix d'un système de (ε_i) donne une racine différente, donc les racines de

P_n (il y en a 2^n) sont données par: $\alpha_{n, \varepsilon_i} = \varepsilon_0 \sqrt{2 + \dots + \varepsilon_{n-1} \sqrt{2}}$. (4)

3°) a) récurrence immédiate (2)

b) résolvons: $\cos(2^{n+1} \theta) = 0 \Leftrightarrow 2^{n+1} \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2k+1}{2^{n+2}} \pi$. La fonction $\cos$ étant une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, +1]$ on trouve bien 2^{n+1} racines de P_n .

4°) a) Comme u_n est racine de P_n et que toutes les racines de P_n sont données au 3° b) c) et

b) On a: $P_p(2 \cos \theta) = 2 \cos(2^p \theta)$ d'où le résultat. (2)

$$\frac{2^{2n+1}}{2^{2n-2p+2}} = 2^{p-1} a_1 + 2^{p-2} a_2 + \dots + a_p + \frac{a_{p+1}}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-p+2}} = 2 \beta_n + a_p + a_p.$$

$$0 \leq a_p \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-p+2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-p+2}} < 1 \Rightarrow a_p \in [0, 1[.$$

$$P_p(u_n) = 2 \cos(2\pi \beta_n + \pi a_p + \pi a_p) = 2 \cos(\pi a_p + \pi a_p) = (-1)^{a_p} 2 \cos(\pi a_p)$$

$$= (-1)^{a_p} 2 \cos\left(\frac{a_{p+1}}{2} + a_{p+1}\right) \pi \text{ où } a_{p+1} < \frac{1}{2}. \text{ Le signe de } \cos\left(\frac{a_{p+1}}{2} + a_{p+1}\right) \pi$$

$$\text{est } 1 \text{ si } a_{p+1} = 0 \text{ et } -1 \text{ si } a_{p+1} = 1 \text{ d'où: } P_p(u_n) (-1)^{a_p + a_{p+1}} \geq 0. \quad \leftarrow (3)$$

$$\text{Calcul de } \cos \frac{5\pi}{32}: k=2, n=3 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_4 = 0, a_3 = 1 \Rightarrow \varepsilon_0 = 1 = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1 \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{32} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}} \quad \leftarrow (3)$$

5°) a) Si on pose: $\theta_{n+1} = \pi \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2^i} + \frac{\pi}{2^{n+2}}$ alors, en vertu de ce qui

précède: $u_n = 2 \cos(\theta_{n+1})$. (2)

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{n+1} = \theta$ et que $\cos$ est continu, alors: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2 \cos \theta$.

D'où, comme tout élément de $[-2, +2]$ peut se mettre sous la forme $x = 2 \cos \theta$

et que $\frac{\theta}{\pi}$ admet un développement dyadique, on aura bien le résultat. (2)

b) $x=2$: $\theta=0 \Rightarrow a_i=0 \Rightarrow \varepsilon_i=1 \Rightarrow 2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \dots}}}$ (2)

$x=1$: $\theta = \frac{\pi}{3}$ comme $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots \Rightarrow \frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Rightarrow a_p = 0$ si p impair, $a_p = 1$ si p pair.

$$\Rightarrow \varepsilon_0 = 1 \text{ et } \varepsilon_i = -1 \text{ si } i \neq 0. \Rightarrow 1 = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots - \sqrt{2 - \dots}}} \quad \leftarrow (2)$$

$x=0$: $\theta_p = \frac{\pi}{2}$: $a_p = 1$ si $p=1$, $a_p = 0$ si $p > 1 \Rightarrow \varepsilon_0 = -1, \varepsilon_1 = -1, \varepsilon_i = 0$ si $i \geq 2$.

$$0 = -\sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \dots}}} \quad \leftarrow (2)$$