

On utilise les 2 propriétés: $|f(x) - f(mu) - f(x-mu)| \leq a$

$$\text{et } |f(mu) - m \cdot f(u)| \leq (m-1)a \Rightarrow (3)$$

$$\text{II. (7. (3) } \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - m \cdot \frac{f(u)}{x} - \frac{f(x-mu)}{x} \right| \leq \frac{m}{x} \cdot a$$

$$\text{Or } \frac{f(x)}{x} - \frac{f(u)}{u} = \left(\frac{f(x)}{x} - m \cdot \frac{f(u)}{x} + \frac{f(x-mu)}{x} \right) - \frac{f(u)}{u} + \frac{m}{x} f(u) + \frac{f(x-mu)}{x}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(u)}{u} \right| \leq \frac{m}{x} \cdot a + |f(u)| \left(\frac{x-mu}{xu} \right) + \frac{|b(x-mu)+c|}{x} \text{ et } x-mu \leq u$$

$$\text{Or } x-mu \leq u \text{ et } |f(u)| \leq bu+c \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(u)}{u} \right| \leq \frac{m}{x} \cdot a + \frac{1}{x} (bu+c) + \frac{|b|}{x}$$

$$\text{et } \frac{1}{x} \leq \frac{1}{u} \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(u)}{u} \right| \leq \frac{a}{u} + \frac{u}{x} \left(b + \frac{c}{u} \right) \leq \frac{a}{u} + \frac{u}{x} (b+c) \text{ c.q.f.d.}$$

$$\text{et } 1 \leq \sqrt{x} \cdot \frac{u}{x} \leq \frac{1}{u} \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(u)}{u} \right| \leq \frac{a+(b+c)u}{u} = \frac{d}{u}$$

2°. L'inégalité (5) est équivalente à: $\frac{f(u)-d}{u} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(u)+d}{u}$

donc, $\forall u \in [1, \sqrt{x}]$, $\frac{f(x)}{x}$ est un majorant de $\frac{f(u)-d}{u}$ et un minorant de $\frac{f(u)+d}{u}$

$$\text{d'où } \boxed{h_1(x) \leq \frac{f(x)}{x} \leq h_2(x)}$$

$$\text{D'autre part: } \frac{f(\sqrt{x})-d}{\sqrt{x}} \leq \sup_{1 \leq u \leq \sqrt{x}} \frac{f(u)-d}{u} = h_1(x), \text{ on a de même: } h_2(x) \leq \frac{f(\sqrt{x})+d}{\sqrt{x}}$$

3°. h_1 est croissante et h_2 décroissante: évident!

$$\text{Or } h_1(x) \leq h_2(x) \leq h_2(1) \text{ donc } h_1 \text{ est croissante et majorée de } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x) \text{ existe}}$$

de même pour h_2 : posons $l_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x)$ et $l_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} h_2(x)$

$$\text{On a } h_1(x^2) \leq \frac{f(x)}{x} + \frac{d}{x} \text{ donc: } h_2(x^2) + \frac{d}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq h_2(x)$$

d'après le th. des "gendarmes", $\frac{f(x)}{x}$ a une limite et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l_2$

On démontrerait aussi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l_1$ d'où: $\underline{l_1 = l_2}$ c.q.f.d.

4°. $\forall y \geq x$, on peut écrire:

en fait, on fait tendre y vers $+\infty$:

$$\frac{f(y)-d}{y} - \frac{d}{y} - \frac{a}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(y)+d}{y} + \frac{d}{y} + \frac{a}{x}$$

$$\Rightarrow l - \frac{a}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq l + \frac{a}{x}$$

$$\text{c.e. } \boxed{|f(x) - lx| \leq a}$$