

3°) [5] $u < v$: en utilisant le II. 1°) avec $x = d(u) \in E(u)$ on a :

$$(v-u)g(d(u)) \leq (v-u)g(y) \Rightarrow h(u) \leq g(y) \text{ de même pour l'autre inégalité } \Rightarrow \underline{h(u) \leq g(y) \leq h(v)}$$

Si $u < w \Rightarrow \exists v : u < v < w \Rightarrow h(u) \leq h(w)$ donc h est croissante.

4°) [8] h est réglée car h est monotone (cf cours).

$$\forall u < v, \forall y \in E(v) \text{ on a : } h(u) \leq g(y) \Rightarrow h(u) \text{ minorant de } \{g(y), y \in E(v)\}$$

$$\Rightarrow \forall u < v : h(u) \leq \inf_{y \in E(v)} g(y) \rightarrow \text{majorant de } \{h(u), u < v\} \Rightarrow \sup_{u < v} h(u) \leq \inf_{y \in E(v)} g(y)$$

Or : $\sup_{u < v} h(u) = h(v-0)$ d'où la 1^{ère} inégalité, l'autre se démontrant de la même manière, on a bien l'inégalité demandée (car : $\inf_{y \in E(v)} g(y) \leq \sup_{y \in E(v)} g(y)$) ...

5°) [12]

$d(u_n) \in [-1, +1]$ ensemble compact, donc, grâce à Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $d(w_k)$ qui a une limite dans $[-1, +1]$ que l'on appelle y .

Montrons que $y \in E(v)$: on sait que $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = v$ (par valeurs supérieures).

or : $f(d(w_k)) + w_k g(d(w_k)) = H(w_k)$ et en passant à la limite (les fonctions étant continues) on a : $f(y) + v g(y) = H(v)$ i.e. $y \in E(v)$

De même, en passant à la limite dans l'égalité : $h(w_k) = g(d(w_k))$ on en déduit :

$$h(v+0) = g(y) \leq \sup_{y \in E(v)} g(y) ; \text{ comme on avait l'inégalité dans l'autre sens au II 4°, on peut conclure : }$$

$$\boxed{h(v+0) = \sup_{y \in E(v)} g(y)}$$

Pour montrer l'autre égalité : on prendrait la suite $u'_n = v - \frac{1}{n}$ dont on extrairait une sous-suite w'_k telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} d(w'_k) = y' \in E(v)$ et on en déduirait : $h(v-0) = g(y')$

$$\text{puis : } h(v-0) \geq \inf_{y \in E(v)} g(y) \text{ et enfin l'égalité : } \boxed{h(v-0) = \inf_{y \in E(v)} g(y)}$$

6°) [10]

Pour montrer l'équivalence de a, b, c, on va montrer les implications suivantes :

$$a \Rightarrow c \Rightarrow b \Rightarrow a :$$

$$\textcircled{a \Rightarrow c} \text{ II } 1^\circ \Rightarrow h(u)(v-u) \leq H(v) - H(u) \leq h(v)(v-u)$$

$$\text{donc : } 0 \leq H(v) - H(u) - (v-u)h(u) \leq (v-u)(h(v) - h(u)) \Rightarrow \left| \frac{H(v) - H(u)}{v-u} - h(u) \right| \leq |h(v) - h(u)|$$

$$\text{or : } \lim_{v \rightarrow u} (h(v) - h(u)) = 0 \Rightarrow H \text{ dérivable en } u \text{ et } H'(u) = h(u).$$

$$\textcircled{c \Rightarrow b} \text{ on suppose } v > u \text{ dans le II } 1^\circ, \text{ donc, si } x \in E(u) : g(x) \leq \frac{H(v) - H(u)}{v-u}$$

$$\text{cette inégalité se conserve à la limite, d'où : } \underline{g(x) \leq H'(u)} \quad \forall x \in E(u)$$

$$\text{avec } v < u, \quad g(x) \geq \frac{H(v) - H(u)}{v-u} \quad \text{donc : } \underline{g(x) \geq H'(u)}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in E(u), \quad g(x) = H'(u) : g \text{ est constante sur } E(u).$$

$$\textcircled{b \Rightarrow a} \text{ Si } g \text{ est constante, alors : } \sup_{x \in E(u)} g(x) = \inf_{x \in E(u)} g(x) = h(u+0) = h(u-0)$$

grâce au II. 5°) donc h est continue en u .