

Corrigé du devoir

30

$$\frac{9X-14}{(X-5)(X^2+X+1)^3} = \frac{1}{31^2(X-5)} + \dots \leftarrow \text{pour calculer ces coefficients, on utilise la méthode de Heaviside}$$

$$\frac{9X-14}{(X-5)(X^2+X+1)^3} = \frac{1}{31^2(X-5)} + \frac{31^2 \cdot 9(X-5) + 31^2(X^2+X+1)^3}{31^2(X-5)(X^2+X+1)^3} - \frac{31^2(X^2+X+1)^3}{31^2(X-5)(X^2+X+1)^3}$$

on : $-X^2 - X + 30 = -(X-5)(X+6)$

$\Rightarrow$

$$\frac{9}{(X^2+X+1)^3} + \frac{-(X+6)}{(X^2+X+1)^3} + \frac{-(X+6)}{31(X^2+X+1)^2} + \frac{-(X+6)}{31^2(X^2+X+1)}$$

d'où :

$$p = \frac{1}{31^2(X-5)} + \frac{-X+3}{(X^2+X+1)^3} + \frac{-X-6}{31(X^2+X+1)^2} + \frac{-X-6}{31^2(X^2+X+1)} \quad (3)$$

II. $\frac{X^2+3X-1}{X^3+X^2+X^3-X-X-1} = \frac{X^2+3X-1}{(X-1)(X^2+X+1)^2} = \frac{X^2+3X-1}{(X-1)(X-j)^2(X-\bar{j})^2} = \frac{1}{3(X-1)} + \frac{a}{X-j} + \frac{b}{(X-j)^2} + \frac{\bar{a}}{X-\bar{j}} + \frac{\bar{b}}{(X-\bar{j})^2}$

On multiplie par $(X-j)^2$, on fait $X=j \Rightarrow b = -\frac{2}{3} = \bar{b}$.

On multiplie par X puis "on fait tendre $X \rightarrow +\infty$ " $\Rightarrow a + \bar{a} = -\frac{1}{3}$

On fait : $X=0 \Rightarrow a j^2 + \bar{a} j = -\frac{2}{3}$

On cherche a sous la forme : $a = \alpha + \beta j$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow a = -\frac{5j}{3} - \frac{4}{9}$

$\Rightarrow$

$$g = \frac{1}{3(X-1)} + \frac{-4-5j}{9(X-j)} + \frac{-2}{3(X-j)^2} + \frac{-4+5j^2}{9(X-\bar{j})} + \frac{-2}{3(X-\bar{j})^2}$$

IV. On obtient directement : $\frac{P_n}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k P_n(x_k)}{X^n-1} \quad (5)$

1). $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{X-x_k} = \frac{n}{X^n-1} \quad (P_n(x_k)=1 \quad \forall x_k) \quad (4)$

(i). $\frac{X^2}{X-x_k} = X + x_k + \frac{x_k^2}{X-x_k}$ or : $\sum_{k=0}^{n-1} x_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^2}{X-x_k} = nX + \frac{nX}{X^n-1} = n \frac{X^{n+1}}{X^n-1} \quad (7)$

(ii). $\left(\frac{X^2}{X-x_k} \right)' = \frac{2X}{(X-x_k)} - \frac{X^2}{(X-x_k)^2}$ (en dérivant comme un produit).

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^2}{(X-x_k)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2X}{X-x_k} - \left(nX + \frac{nX}{X^n-1} \right)' = n \frac{X^{2n} + (n-1)X^n}{(X^n-1)^2} \quad (10)$

III. R est une fraction rationnelle qui admet $0, -1, -2, \dots, -n$ comme pôles

simple $\Rightarrow R = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{X+k} \quad (3)$; il suffit donc de montrer que : $a_k = 0$ si $k < n$
 $a_n = 1$.

$a_i = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(-i)(-i+1)\dots(-1)(1)\dots(k-i)} + (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!(-1)\dots(-i-1)} \quad i < n \quad (6)$

$\frac{n!}{(n-i)! i!} \times \frac{(-1)^{n-i} (n-i)!}{(n-i)! (i-i)!} \Rightarrow a_i = \sum_{k=i}^n C_n^i (-1)^{n-i} C_{n-i}^{k-i} = \left(\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k C_{n-i}^k \right) C_n^i$
 $= 0 = (-1)^{n-i}$

si $i=n$. $a_n = (-1)^n \frac{n!}{0!} \times \frac{1}{(-n)(-n+1)\dots(-1)} = 1$ c.q.f.d. (3)