

## PROBLEME

I. Démonstration de :  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k P(x+k) = 0$  si  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . (1)

1°) Montrer que les polynômes  $e_0 = 1, e_1 = X, e_2 = \frac{1}{2}X(X-1), \dots, e_n = \frac{1}{n!} \cdot X(X-1)(\dots)(X-n+1)$  forment une base de  $\mathbb{R}_n[X]$

2°) En utilisant la formule  $(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k$ , montrer que : si  $p < n$ ,  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k(k-1)(\dots)(k-p+1) = 0$  ; en déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^p$ .

3°) Montrer alors l'égalité (1).

II. Etude de  $\Delta P = P(X) - P(X+1)$

1°) Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  ; montrer que  $\dim \ker \Delta = 1$ , déterminer  $\text{Im } \Delta$ .

2°) Calculer la valeur de  $\Delta e_k$ .

3°) Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X] : P = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$  ; calculer les valeurs de  $a_i \in \mathbb{R}$  en fonction des  $(\Delta^k P)(0)$ . (En déduire l'équivalence suivante :  $(\forall k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\forall i \in [0, n], a_i \in \mathbb{Z})$ ).

4°) Trouver l'expression de  $(\Delta^k P)(X)$  ; donner les valeurs des  $a_i$  en fonction des valeurs  $P(k), k \in [0, n]$ .

5°) Donner une autre façon de démontrer l'égalité (1).

III. Polynômes de Bernoulli.

On définit la suite  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$  par :  $B_0(x) = 1$  et  $\forall n \geq 2 : \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k(x) = n x^{n-1}$  (2).

1°) Calculer les polynômes  $B_i$  pour  $i \leq 5$  ; donner le degré de  $B_k$ .

2°) a) Montrer soigneusement par récurrence sur  $p$  que :  $\Delta B_p = -p x^{p-1}$  (3)

b) Application : retrouver  $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3$  et calculer  $S_4 = \sum_{k=1}^n k^4$ .

3°) a) Montrer par récurrence sur  $p$  que  $D(B_p) = p B_{p-1}$  où :  $D(P) = P'$ . (4)

b) En déduire :  $B_n(x+k) = \sum_{k=0}^n C_n^k k^k B_{n-k}(x)$ .