

EXERCICE I :

Calculer la dérivée de $f(x) = \operatorname{Arccos} \frac{-x^2 \sqrt{2-\sqrt{2}} + 2x\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2(1+x^2)}$

En déduire une expression simplifiée de $f(x)$
 (Remarquer que $\sqrt{1-u^2}$ est un carré parfait).
 (rencontré dans le calcul de u').

EXERCICE II :

On veut déterminer la fonction $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant les conditions:

i) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x+y) + x + y = (f(x) + x)(f(y) + y)$

ii) $f(1) = a - 1$ (où $a > 0$).

1°). Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) + x > 0$ (appliquer i à $x/2$).

Calculer $f(0)$.

2°) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = [f(x) + x]^n - nx$

et que ce résultat persiste si $n \in \mathbb{Z}$.

Calculer $f(n)$ si $n \in \mathbb{Z}$ puis $f(p/q)$ si $p/q \in \mathbb{Q}$.

En déduire alors l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

PROBLEME :

I. On appelle polynôme de Tchebychev tout polynôme dont la fonction polynomiale associée est définie sur $I = [-1, +1]$ par $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x)$ ($n \in \mathbb{N}$).

1°) Montrer la relation de récurrence : $T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$ ($n \geq 1$).

En déduire que T_n est bien une fonction polynôme et que le degré de T_n est n .

Calculer le coefficient de plus haut degré de T_n ainsi que : $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

2°) Déterminer les racines de T_n et montrer qu'elles appartiennent à I .

Montrer que la fonction T_n atteint sur I ses extremums en $n+1$ points que l'on déterminera.

3°) Calculer et représenter graphiquement les fonctions T_2, T_3 et T_4 définies sur I (sur un même graphique et soigneusement).

Prouver que : $T_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} (1-x^2)^k$ où $q = E(n/2)$