

4°. a) A l'aide de Δ et d'1 récurrence, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k B_k(x) = n(1-x)^{n-1} \quad (\text{poser } y=1-x).$$

En déduire que : $(-1)^n B_n(1-x) = B_n(x)$ (5)

b) On pose $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \beta_{n-k} x^k$. Calculer $B_n(0) = \beta_n$ à l'aide de (3) et (5) ; puis, grâce au (4), montrer que $k \geq 1 \Rightarrow \beta_{2k+1} = 0$.

c) Montrer que l'on peut écrire les polynômes $B_n(x)$ sous la forme : $B_n(x) = x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} + C_n^2 b_1 x^{n-2} + \dots + (-1)^{k+1} C_n^{k+1} b_k x^{n-2k} + \dots + (-1)^{[n/2]+1} C_n^{2[n/2]} b_{[n/2]} x^{n-2[n/2]}$ où les nombres b_i sont indépendants du polynôme B_n choisi (procéder par intégrations successives pour le b et c). A l'aide du 1°, donner les valeurs de b_1, b_2 .

d) Calculer $B_{2n}(1)$, en déduire une formule entre $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ permettant de calculer par récurrence les coefficients b_k . Faire le calcul pour b_3, b_4, b_5 .

EXERCICES :

1°. Déterminer les limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 5 \cos 6x - 6 \cos 5x}{\cos x + 10 \cos 2x - \cos 3x - 1}$
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{(x^2 - 2x)^3} - \sqrt{x^2 - 2x^2 + 1}}{2\sqrt{x}(\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2} \cdot x)}$

2°. Montrer que, si f est une fonction périodique et si f admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$ alors f est constante.