

II. On rappelle que : $\|f\| = \sup_{t \in I} |f(t)|$ est une norme sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

On note $\tilde{T}_n$ le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ si $n \geq 1$ et $\tilde{T}_0 = T_0$.

AP). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|\tilde{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

2°) Si on pose $\tilde{\mathcal{R}}_n[X]$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n ,
montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \nexists Q \in \tilde{\mathcal{R}}_n[X]$ tels que : $\|Q\| < \frac{1}{2^{n-1}}$ (préciser
ce qui se passe pour $n=2, 3$ et 4 — on regardera le nombre des racines de $\tilde{T}_n - Q$).

En déduire que : $\inf_{Q \in \tilde{\mathcal{R}}_n[X]} \|Q\|$ est égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$ et qu'elle est atteinte.

3°). Démontrer que, si $n=1$ et $n=2$ $\inf_{Q \in \tilde{\mathcal{R}}_n[X]} \|Q\| = \|\tilde{T}_n\|$ et que $\tilde{T}_n$
est le seul.

B. Etant donné $n+1$ points distincts de I : $x_0, x_1, \dots, x_n$, on sait
qu'il existe un seul polynôme L_n (polynôme d'interpolation de Lagrange).
tel que : $L_n(x_k) = f(x_k)$ pour $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

1°). Démontrer par récurrence sur n que si $f \in \mathcal{D}_{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ et si
 $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$ alors, $\forall x \in [a, b], \exists \xi \in]a, b[$,

$$f(x) = \pi(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{ou} \quad \pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

2°). Si $f \in \mathcal{D}_{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ et si L_n est son polynôme d'interpolation, alors

$$\text{montrer que : } f(x) - L_n(x) = \pi(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{ou} \quad \xi \in]a, b[.$$

En déduire : $\|f - L_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\| \cdot \|\pi\|$ (On suppose $f^{(n+1)}$ continue).

3°) En utilisant le I et le II A et en choisissant les points $x_0, x_1,$
 $x_2, \dots, x_n$, montrer que l'on a : $\|f - L_n\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)! 2^n}$.

En déduire que si $\|f^{(n+1)}\| \leq M \cdot (n+1)! a^n$ avec $a < 2$ alors

la fonction indéfiniment dérivable f est limite uniforme de poly-
nômes d'interpolation.