

PROBLEME

I. 1°) Raisonnons sur les degrés.

2°) En dérivant p fois $\Rightarrow \frac{n!}{(n-p)!} (1-x)^{n-p} (-1)^p = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k(k-1)\dots(k-p+1) x^{k-p}$
 puis on fait $x=1$ d'où la relation.

On exprime X^p en fonction de $e_1, e_2, \dots, e_p$. Comme : $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e_p(k) = 0$,
 par combinaison linéaire, on en déduit que : $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e_p(k) = 0$.

3°) Il suffit de montrer ① pour les vecteurs de la base canonique : $X^p, p \leq n-1$.
 Or : $(X+k)^p = X^p + C_p^1 k X^{p-1} + \dots + C_p^p k^p$. d'où :
 $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (X+k)^p = \sum_{k=0}^n X^{p-k} C_p^k \left(\sum_{e=0}^n (-1)^e C_n^e k^e \right) = 0$ c.q.f.d.

II. 1°) $P(X) = P(X+1) (\Leftrightarrow) P \in K \Rightarrow \dim \text{Ker } \Delta = 1$ et $\dim \text{Im } \Delta = n$. Or,
 $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X] \Rightarrow \text{Im } \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2°) $\Delta e_k = -e_{k-1}$ (ce qui confirme ce qui a été fait au 1°).

3°) $P(0) = a_0, \Delta^k P(0) = \sum_{e=0}^k (-1)^e C_k^e a_e$ (par récurrence) $\Rightarrow a_k = (\Delta^k P)(0) (-1)^k$
 ($\Leftarrow$) immédiat ; ($\Rightarrow$) $(\Delta^k P)(0)$ est une combinaison linéaire à coef. dans $\mathbb{Z}$ des $P(k)$ (cf 4°).

4°) Par récurrence : $(\Delta^k P)(X) = \sum_{e=0}^k (-1)^e C_k^e P(X+e)$ (bizarre!)
 $\Rightarrow a_i = \sum_{e=0}^i (-1)^e C_i^e P(e)$.

5°) Par récurrence : $\text{Ker } \Delta^k = \mathbb{R}_{k-1}[X]$; donc, $\text{Ker } \Delta^n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$: i.e.
 $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (\Delta^n P)(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k P(X+k) = 0$ c.q.f.d.

III. 1°) $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$; $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$; $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
 $B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$; $\deg B_k = k$.

2°) a) On a : $\Delta B_0 = 0, \Delta B_1 = -1$; H.R. : $\forall k \leq n-1 : \Delta B_k = -k x^{k-1}$.
 Ordu n : ② $\Rightarrow \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k \Delta B_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} -k C_{n+1}^k x^{k-1} + (n+1) \Delta B_n(x) = (n+1) \Delta(x^n)$.
 Or, $k C_{n+1}^k = (n+1) C_n^{k-1}$ et après calculs, on trouve : $\Delta B_n(x) = -n x^{n-1}$ c.q.f.d.
 b). $k^3 = -\frac{1}{4} (\Delta B_4)(k) = -\frac{1}{4} [B_4(k) - B_4(k+1)] \Rightarrow \sum_{k=1}^n k^3 = -\frac{1}{4} (B_4(1) - B_4(n+1))$
 On retrouve bien : $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.
 De même, après calculs ..., on trouve : $\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n^2+n+\frac{1}{3})$.

3°) a) On a $\mathcal{D}(B_2) = B_0$, puis en utilisant une récurrence tout à fait semblable à celle du 2° a), on a : $\mathcal{D}(B_p) = p B_{p-1}$.

b) On applique la formule de Taylor (!).

$$B_n(x+k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} k^k B_n^{(k)}(x) \text{ or : } B_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(x)$$

4°) a) Soit P_n le 1^{er} membre de l'égalité à démontrer, Q_n le 2nd membre.
 $\Delta P_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (-k x^{k-1}) = -n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k C_{n-1}^k x^k = -n (1-x)^{n-1} - (-x)^{n-1}$
 On pose $k = k-1$ et on utilise : $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$.