

Exercice I :

On donne :  $u(x) = \frac{A(x)}{(1+x)^2}$  et  $(1-u) = \frac{A(x)^2}{4(1+x)^2}$  avec  $A(x) = x^2(\sqrt{2-x}) - 2x\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x}$  (1)

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  où  $\epsilon$  est du signe de  $A(x)$  (2)

Simplification de  $f(x)$  : on pose  $x = \tan \frac{t}{2}$  :  $t \in ]-\pi, +\pi[$

$\cos \frac{t}{2} = \frac{1+\cos t}{2}$  et  $\sin \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{1-\cos t}}{2} \Rightarrow f(x) = \text{Arcsin}(\sin t + \frac{\pi}{8})$

Donc :  $x \in ]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$  :  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{Arcsin} x - \frac{9\pi}{8}$  (3)  
 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$  :  $f(x) = 2 \text{Arcsin} x + \frac{7\pi}{8}$   
 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$  :  $f(x) = -2 \text{Arcsin} x + \frac{7\pi}{8}$

Exercice II :

1°)  $f(x) \circ x = (f(x) + x)^2 > 0$  et  $f(0) = 1$  (2)

2°) Par récurrence, on a :  $f(n x) = [f(x) + x]^n - n x$  (2)

Puis :  $f(-x) - x = (f(x) + x)^{-1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} : f(n x) = [f(x) + x]^n - n x$  (2)

$f(x) = a^n - n$  (2)

$f(\frac{1}{9}) = (f(\frac{1}{9}) + \frac{1}{9})^9 - 1 \Rightarrow f(\frac{1}{9}) = a^{1/9} - \frac{1}{9} \Rightarrow f(\frac{1}{9}) = a^{1/9} - \frac{1}{9}$  (2)

Comme  $f$  est continue et que  $f(x) = a^n - n$  si  $n \in \mathbb{Q}$  alors,  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (x_n) \in \mathbb{Q}^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow f(x) = a^{\lim x_n} - \lim x_n = a^x - x$  (2)

Problème :

1°) On sait que :  $2 \cos \theta \cos n \theta = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta$  (4)

d'où la relation demandée en posant  $\theta = \text{Arccos } x$ .

$T_0 = 1, T_1 = x$  ; H.R. :  $\begin{cases} T_{n+1} \text{ et } T_n \text{ sont des polynômes} \\ \deg T_{n+1} = n+1 \text{ et } \deg T_n = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{n+1} \text{ polynôme} \\ \deg T_{n+1} = n+1 \end{cases}$  (3)

Coef. du terme de +2 est degré :  $T_n(x) = x^n + \dots$  (2)

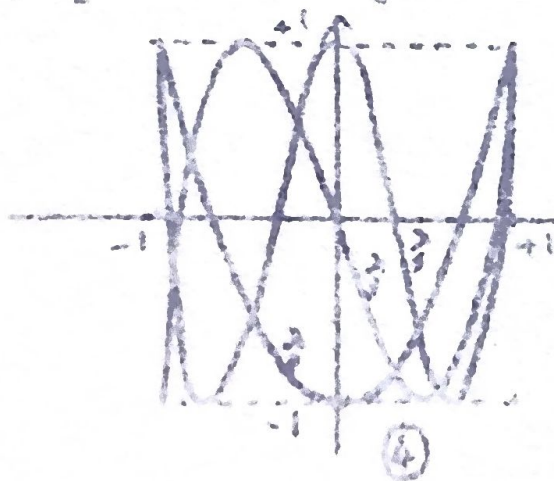
$T_n(1) = \cos(n \text{ Arccos } 1) = 1$  et  $T_n(-1) = \cos(n \pi) = (-1)^n$  (1)

2°)  $T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \text{ Arccos } x) = 0 \Leftrightarrow n \text{ Arccos } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  (4)  
 $k \in [0, n-1]$   $k \in [0, n-1]$

Or  $\deg T_n = n$  et on a trouvé  $n$  racines dans  $I$ .

Extremums de  $T_n$  :  $\cos(n \text{ Arccos } x) = \pm 1 \Leftrightarrow n \text{ Arccos } x = k\pi \Leftrightarrow x = \cos \frac{k\pi}{n}, k \in [0, n]$ .

3°)  $T_2 = 2x^2 - 1$   $T_3 = 4x^3 - 3x$   $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$  (2)



On a :  $\cos n \theta + i \sin n \theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$   
 $\Rightarrow \cos n \theta = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^{2k} \cos^{2k} \theta \sin^{2n-2k} \theta$

On obtient bien la relation demandée en posant  $\theta = \text{Arccos } x$  et en élevant que :  $\sin^{2k} \theta = (1 - \cos^2 \theta)^k$  (4)