

Donc, $\Delta(P_n - Q_n) = 0$, i.e. : $P_n = Q_n + a_n, a_n \in \mathbb{R}$; pour montrer que $a_n = 0$, c'est un peu plus compliqué ! : grâce à la relation ci-dessus, on a montré que : $\forall n : P_n - Q_n$ différent d'une constante, or, par intégration, on a : $(n+1)P_{n+1} - (n+1)Q_{n+1} = a_n \cdot x + a_{n+1} = (n+1) \cdot a_{n+1} \Rightarrow a_n = 0$ c.q.f.d. (ou f !)

4) Par une simple récurrence, en utilisant la relation que l'on vient de démontrer, on en déduit (5).

b) (3) $\Rightarrow B_n(0) = B_n(1)$; (5) $\Rightarrow (-1)^n B_n(1) = B_n(0) \Rightarrow \beta_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) \beta_n(1)$ i.e. : $\beta_{2p+1} = 0$ (si $n = 2p+1$).

Montrons par récurrence sur n que : $\beta_{2p+1} = 0$: vrai pour $n = 3, 4, 5$.

H.R. : vrai à l'ordre n : $B'_{n+1}(x) = (n+1) \cdot B_n(x) \Rightarrow$

$$B_{n+1}(x) = (n+1) \left[\sum_{k=0}^n \beta_{n-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right] + B_{n+1}(0) = \sum_{k=0}^{n+1} \beta'_{n+1-k} x^k$$

$$\Rightarrow \beta'_{n+1-k} = \frac{n+1}{k} \beta_{n+1-k} \text{ si } k \leq n \text{ et } \beta'_{n+1} = B_{n+1}(0).$$

Si n est impair, c'est bien vérifié; si n est pair, $\beta'_{n+1} = 0$ en vertu de ce que l'on vient de faire.

c) Par récurrence : c'est vrai pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (!).

H.R. : vrai à l'ordre n : $B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$; grâce aux relations déjà démontrées au b) $\Rightarrow \beta'_k = \frac{n+1}{n+1-k} \beta_k$, avec $k = 2k$ et $\beta_{2k} = (-1)^{k+1} C_n^{2k} b_{\frac{2k}{2}}$ on trouve bien $\beta'_{2k} = (-1)^k C_{n+1}^{2k} b_k$ c.q.f.d.

On a : $b_1 = 1/6$, $b_2 = 1/30$.

d) On a : $B_{2n}(1) = B_{2n}(0) = b_n$, d'où la formule :

$$1 - n + C_{2n}^2 b_1 + \dots + (-1)^{n+1} C_{2n}^{2n} b_{\frac{2n}{2}} + \dots + (-1)^n C_{2n}^{2n-2} b_{n-1} = 0.$$

On trouve alors : $b_3 = \frac{1}{42}$, $b_4 = \frac{1}{30}$, $b_5 = \frac{5}{66}$

Exercices :

1°) On utilise le D.L. : $\cos(ax) = 1 - \frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow 1^{\text{ère}} \text{ limite} = -\frac{15}{2}$

2^{ème} limite : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$:

$$B(x) = 2\sqrt{x} \cdot \frac{2x^2 + x - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{2} \cdot x} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$$

$A(x) = a(x) - b(x)$ où $a(x) \sim b(x) \sim x^{3/2}$; on utilise l'identité : $a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3}$ et $a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3 \sim 4x^{9/2}$.

$$a^4 - b^4 \sim -2x^5 \Rightarrow A f(x) \sim \frac{-2x^5}{4 \cdot x^{9/2} \cdot \sqrt{x}} \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2°) Cf cours (!).