

II

17.  $\|T_n\| = \frac{1}{2^{n+1}}$  (inductif) (2)

18.  $T_n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  (car le pol. de plus haut degré de  $T_n$  est  $2^n$ ).

$n=2$ :  $\|Q\| < \frac{1}{2} \Rightarrow (Q - \tilde{T}_2)(-1) > 0, (Q - \tilde{T}_2)(0) > 0$  et  $(Q - \tilde{T}_2)(1) < 0$ .  
 $\exists x_1, Q - \tilde{T}_2 \text{ a } 2 \text{ racines et } \deg(Q - \tilde{T}_2) \leq 2$  : contradiction. (6)

$n=3$ :  $\|Q\| < \frac{1}{2} \Rightarrow (Q - \tilde{T}_3)(-1) > 0, (Q - \tilde{T}_3)(-\frac{1}{2}) < 0, (Q - \tilde{T}_3)(\frac{1}{2}) > 0, (Q - \tilde{T}_3)(1) < 0$   
 $\Rightarrow Q - \tilde{T}_3$  a 3 racines et  $\deg(Q - \tilde{T}_3) \leq 3$  : contradiction.

Pour  $n=4$ ,  $Q - \tilde{T}_4$  a 4 racines et est de degré  $\leq 4$  : contradiction.  
 On démontrerait de même à l'ordre  $n$  que  $Q - \tilde{T}_n$  a  $n$  racines et est de degré  $\leq n-1$  (en effet, les termes de degré  $n$  s'annulent).

$\Rightarrow \forall Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \|Q\| \geq \frac{1}{2^{n+1}}$  et  $\tilde{T}_n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  vérifie  $\|\tilde{T}_n\| = \frac{1}{2^{n+1}}$  donc,  
 $\inf_{Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})} \|Q\| = \frac{1}{2^{n+1}}$  et cette borne est atteinte. (2)

37.  $n=1$ :  $Q = X + a$ .  $\Rightarrow \|Q\| = \sup(\|1+a\|, \|1-a\|)$  si  $a \neq 0$ :  $\|Q\| > 1 \Rightarrow \tilde{T}_1 = X$  car (2)

$n=2$ :  $Q - \tilde{T}_2$  est un polynôme de 1<sup>er</sup> degré au maximum.  
 Si  $Q - \tilde{T}_2$  n'a pas de racines : on aura : soit  $\begin{cases} Q(-1) > \tilde{T}_2(-1) = \frac{1}{2} \text{ impossible} \\ \text{soit } \begin{cases} Q(0) < \tilde{T}_2(0) = -\frac{1}{2} \text{ impossible} \end{cases} \end{cases}$  (2)

Si  $Q - \tilde{T}_2$  a une racine  $\alpha_1$  : on aura : soit  $x < \alpha_1$ :  $Q - \tilde{T}_2 > 0 \Rightarrow Q(-1) > \tilde{T}_2(-1) = \frac{1}{2}$  impossible  
 soit  $x > \alpha_1$ :  $Q - \tilde{T}_2 > 0 \Rightarrow Q(1) > \tilde{T}_2(1) = \frac{1}{2}$  impossible

Donc, il n'y a qu'une seule possibilité :  $Q = \tilde{T}_2$

38. 1<sup>er</sup>  $n=1$  Th. de Rolle. H.R. : vrai à l'ordre  $n$ .

à l'ordre  $n+1$ :  $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_{n+1}) = 0$  (avec  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ ).

En appliquant le Th. de Rolle sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  : il existe  $\xi_i \in [0,1]$  tel que  $f'(\xi_i) = 0$  et en utilisant l'H.R. avec  $f'$  et les  $\xi_i$  alors  $\exists \xi \in ]a,b[$

$(f')^{(n)}(\xi) = 0$  i.e.  $f^{(n+1)}(\xi) = 0$ .

On applique alors ce résultat à la fonction  $\varphi(t) = f(t) - \pi(t) \cdot \frac{1}{(n+1)!}$  on a bien

par que  $\varphi(x) = 0$ . On a:  $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_n) = \varphi(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in ]a,b[$   $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$

Or  $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{1}{(n+1)!} \pi^{(n+1)}(t)$  d'où le résultat demandé. (8)

2<sup>o</sup> On applique le résultat ci-dessus à la fonction  $f - L_n$

$\Rightarrow f(x) - L_n(x) = \pi(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Rightarrow \|f - L_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\| \cdot \|\pi\|$

( $\|f^{(n+1)}\|$  existe car  $f^{(n+1)}$  est continue sur  $I$ ) (4)

3<sup>o</sup> On prend  $\pi = \cos(\frac{2\pi}{b-a}x)$  car  $\pi$  n'est autre que le polynôme  $T_n$ .

Donc  $\|\pi\| = \frac{1}{2^n}$  d'où la majoration. (4)

Si  $\|f^{(n+1)}\| \leq M(n+1)!$  alors  $\|f - L_n\| \leq \left(\frac{M}{2}\right)^n$  or  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2}\right)^n = 0$  donc  $(L_n)$  converge vers uniformément vers  $f$ . (3)