

HX4

(corrige du devoir surveille)

I. On utilise la formule de Moivre: $\cos(2n\alpha) + i \sin(2n\alpha) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2n}$.et on met $(\cos \alpha)^{2n}$ en facteur.Comme $\operatorname{rg}(\operatorname{Arctg} x) = x$ on en déduit que:

$$F_n(x) = \frac{2n\alpha - C_{2n}^3 x^3 + \dots + (-1)^{n-1} 2n\alpha}{1 - C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^4 x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n}}$$

On a donc: $F_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ avec $\deg P_n < \deg Q_n$: F_n définit bien une fraction rationnelle de partie entière nulle.D'autre part: x pôles de $F_n \Leftrightarrow 2n \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \operatorname{rg}\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)$ et on doit avoir: $\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow -n \leq k \leq n-1$: ce qui donne $2n$ valeurs pour x_k $\cos(\operatorname{Arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f_n(x) = (1+x^2)^n \cos(2n \operatorname{Arctg} x) = Q_n(x)$

$$f'_n(x) = 2n(1+x^2)^{n-1} [x \cos(2n \operatorname{Arctg} x) - \sin(2n \operatorname{Arctg} x)] = Q'_n(x)$$

On sait que: $F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{A_k}{x - x_k}$ avec $A_k = \frac{P_n(x_k)}{Q'_n(x_k)}$: $P_n(x_k) = (1+x_k^2)^n \sin(2n \operatorname{Arctg} x_k)$ d'où: $A_k = (1+x_k^2)^n \left(-\frac{1}{2n}\right)$ ($\cos(2n \operatorname{Arctg} x_k) = 0$)et la décomposition de F_n :

$$F_n = -\frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)} \frac{1}{x - \operatorname{rg}\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)}$$

II a) On a: $X^5 - 3X^3 - X^2 + 3 = (X^2 + X + 1)(X-1)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$. (j et j^2 racines)

et, avec les techniques usuelles:

$$f = \frac{2X+7}{39(X^2+X+1)} - \frac{1}{6(X-1)} + \frac{9+\sqrt{3}}{156(X-\sqrt{3})} + \frac{9-\sqrt{3}}{156(X+\sqrt{3})}$$

b). On pose $Y = X-1$

$$X^5 + 2 = 3 + 5Y + 10Y^2 + \dots$$

$$3 + 5Y + 10Y^2 \quad \begin{array}{r} 1+Y+Y^2 \\ 3+2Y+5Y^2 \end{array}$$

$$X^2 - X + 1 = 1 + Y + Y^2 \text{ et on fait la division:}$$

La partie entière vaut 1; on multiplie par $X^2 - X + 1$ et on prend $X = -j$

d'où:

$$g = \frac{1}{1} + \frac{3}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{5}{(X-1)} + \frac{-X+3}{X^2-X+1}$$

III. Décomposition de $\frac{1}{A^2 B}$: on x par B, on pose $X=j$, on x par X, on pose $X=i$.on x par X et $X \rightarrow +\infty$, et enfin, on pose $X=0 \Rightarrow \frac{1}{A^2 B} = \frac{X}{B} + \frac{1-X}{A} \Rightarrow \frac{X}{A^2}$ (1)de même: $\frac{X^2}{A^2 B} = \frac{X}{A^2} - \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$

$$\text{or } \frac{X(1-X)}{AB} = \frac{(B-A)(1-X)}{AB} = \frac{1-X}{A} + \frac{X-1}{B}$$

Décomposition de $\frac{1}{A^4 B^2}$:

On élève les 2 membres de (1) au carré:

$$\frac{1}{A^4 B^2} = \frac{X^2}{B^2} + \frac{(1-X)^2}{A^2} + \frac{X^2}{A^4} + \frac{2X(1-X)}{AB} - \frac{2X^2}{A^2 B} - 2 \cdot \frac{X(1-X)}{A^3}$$

$$\frac{X^2}{B^2} = \frac{B-(X+1)}{B^2} = \frac{1}{B} - \frac{X+1}{B^2}; \frac{(1-X)^2}{A^2} = \frac{A-2X}{A^2} = \frac{1}{A} - \frac{2X}{A^2}; + \frac{X^2}{A^4} = \frac{A-1}{A^4} = \frac{1}{A^3} - \frac{1}{A^4}$$

$$\text{et enfin: } -2 \frac{X(1-X)}{A^3} = \frac{2A-2X-2}{A^3} = \frac{2}{A^2} - 2 \frac{X+1}{A^3}$$

en rassemblant:

$$\frac{1}{A^4 B^2} = \frac{2X-3}{B} - \frac{X+1}{B^2} + \frac{-2X+5}{A} + \frac{-4X+2}{A^2} - \frac{2X+1}{A^3} + \frac{1}{A^4}$$