

I. 1) $(1+x^2)^n = (1+a_1^2)^n + (x-a_1) \times 2na_1(1+a_1^2)^{n-1} + (x-a_1)^2 [\dots]$

or $P'(x) = P'(a_1) + (x-a_1) 2P(a_1)P'(a_1) + (x-a_1)^2 (2P'(a_1) + 2P(a_1)P''(a_1))$
 $+ \frac{(x-a_1)^3}{6} (6P'(a_1)P''(a_1) + 2P(a_1)P'''(a_1)) + (x-a_1)^4 [\dots]$ d'où les valeurs:
 $\alpha_0 = (1+a_1^2)^n$, $\alpha_1 = 2na_1(1+a_1^2)^{n-1}$, $\alpha_2 = P'(a_1)^2$, $\alpha_3 = P'(a_1)P''(a_1)$.

2) On fait la division suivant les puissances croissantes de $x_0 + x_1 Y$ par $x_2 + x_3 Y$ et on trouve: $\beta_1 = \frac{(1+a_1^2)^n}{(P'(a_1))^2}$, $\beta_2 = \frac{(1+a_1^2)^n \cdot [2na_1 P'(a_1) - (1+a_1^2)P''(a_1)]}{(P'(a_1))^3}$

3) Si P vérifie $(1+x^2)P'' - 2nXP' + n(n+1)P = 0$ alors, vu que $P(a_1) = 0$ on a $\beta_2 = 0$
 Réciproque: Soit $Q(x) = (1+x^2)P''(x) - 2nXP'(x) + n(n+1)P(x)$: on sait que:

$\forall a_1: Q(a_1) = 0$ et d'autre par $\deg Q = n \Rightarrow Q = \lambda P$; pour déterminer λ , on examine la terme de plus haut degré de Q et on trouve $\lambda = -n(n+1)$ c.q.f.d.

II. Les racines de G sont $z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$, $k \in [0, 2n-1] \Rightarrow G = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{a_k}{x - z_k}$
 et $a_0 = \frac{1}{2n}$. Pour avoir la décomposition sur $\mathbb{R}$, on rassemble les z_k conjugués: $G = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x - \cos(\frac{2k\pi}{n})}{x^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{n})x + 1}$

Pour H, on pose $Y = X-1$ et on fait la division suivant les puissances croissantes de $4 + Y + Y^2$ par $9 + 18Y + 15Y^2 + 6Y^3 + Y^4$ à l'ordre 3 $\Rightarrow$

Quotient: $\frac{4}{9} - \frac{7}{9}Y + \frac{25}{27}Y^2 - \frac{23}{27}Y^3$; reste: $\frac{17}{3}Y^4 + 8Y^5 + \frac{113}{27}Y^6 + \frac{23}{27}Y^7$
 $\Rightarrow H = \frac{4}{9(X-1)^4} - \frac{7}{9(X-1)^3} + \frac{25}{27(X-1)^2} - \frac{23}{27(X-1)} + \frac{5X+2}{9(X^2+X+1)^2} + \frac{23X+21}{27(X^2+X+1)}$

III. On a: $I = P + H$ où: $P = \frac{x^2 + \beta}{x^2(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x^2+1)^2} + \frac{e}{x^2+1}$
 On a: $a = \beta$, $b = \frac{1+\beta}{16}$, $d = \frac{1-\beta}{4}$.

En posant $Y = X-1$ et en faisant une division suivant les puissances à l'ordre 2, on trouve

$c = -\frac{5\beta-3}{16}$; Puis, en retranchant $\frac{\beta}{x^2}$ à P et en faisant $X=0$, on trouve
 $d = 2(b-c) + d + e \Rightarrow e = \frac{1-3\beta}{4}$.

$H = \frac{dX^2 + \gamma}{X^2(X^2+1)^2} = \frac{a'}{X^3} + \frac{b'}{X} + \frac{c'}{(X-1)^2} + \frac{d'}{X-1} - \frac{c'}{(X+1)^2} + \frac{d'}{X+1} + \frac{e'X}{(X^2+1)^2} + \frac{f'X}{X^2+1}$

On trouve $c' = \gamma$ et $c' = d$ en faisant une division suivant les puissances.

Puis $c' = \frac{d+\gamma}{16}$, $e' = \frac{\gamma-d}{4}$

Pour avoir d' , on fait une division suivant les puissances croissantes avec:

$Y = X-1 \Rightarrow d' = -\frac{2d+3\gamma}{8}$ et enfin $f' = \frac{3\gamma-2d}{4}$ (on x par X et $X \rightarrow X+1$)
 d'où:

$$I = \frac{\beta}{x^3} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{d}{x} + \frac{1+d+\beta+\gamma}{16(x-1)^2} - \frac{3+4d+5\beta+6\gamma}{16(x-1)} + \frac{1-d+\beta-\gamma}{16(x+1)^2} - \frac{-3+4d-5\beta+6\gamma}{16(x+1)}$$

$$+ \frac{(\gamma-d)x + (1-\beta)}{4(x^2+1)^2} + \frac{(3\gamma-2d)x + 1-2\beta}{4(x^2+1)}$$