

I. Soient $f = \frac{x+1}{(x^4+x^2+1)(x^2+x+1)^2}$, $g = \frac{3-x^2}{x^2(x^2-1)(x^2+1)^3}$ (2H)

et $h = \frac{x^5+5}{(x+1)^5-x^5-1}$. Décomposer f, g et h sur $\mathbb{R}$, puis h sur $\mathbb{C}$.

II. Montrer que $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x)$ ($x \in [-1, +1]$) permet de définir un polynôme (utiliser — après l'avoir démontrée — la relation : $T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$). Montrer que $\deg(T_n) = n$ puis donner toutes les racines de T_n .

Décomposer alors la fraction rationnelle : $f_n = \frac{1}{T_n(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

III. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines dans $\mathbb{C}$ de $X^n + 1$. Montrer que :
$$\frac{x^n - 1}{(x^2 - 1)(x^n + 1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(x - \alpha_j)(x - \bar{\alpha}_j)}$$

(On pourra distinguer les cas : $n = 2p$ et $n = 2p+1$).

$$\bar{x} = g \quad \sigma = 3, 4, 5$$

$$n = 20, 5 \quad 1$$

$$13, 5 \leq n \leq 15, 5 \quad 3$$

$$11 \leq n \leq 13 \quad 10$$

$$8 \leq n \leq 10 \quad 12$$

$$5, 5 \leq n \leq 7, 5 \quad 13$$

$$3 \leq n \leq 5 \quad 5$$