

(donné le 9/1/79)

PROBLEME 1:

1°) Posons $f(x) = \frac{ax + bx^3}{1 + cx^2} - \operatorname{Arctg} x$ où a, b, c désignent 3 constantes réelles et x une variable réelle.

Déterminer a, b et c de façon que, lorsque x est infiniment petit, l'infiniment petit $f(x)$ soit d'ordre le plus élevé possible.

On constatera que ce problème admet une unique solution.

Quelle est, a, b, c ayant les valeurs calculées ci-dessus, la partie principale de $f(x)$ en 0 ? (On conserve les valeurs de a, b, c par la suite).

2°) Vérifier que $f(-x) = -f(x)$; puis calculer $f'(x)$ (qui se simplifie beaucoup) et déterminer son signe. Variations de f ?

3°) Calculer $f''(x)$, résoudre l'équation $f''(x) = 0$ et déterminer le signe de $f''(x)$ selon les valeurs de x .

4°) Déterminer l'asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$, puis tracer soigneusement cette courbe. (On calculera les valeurs algébriques de f et f' pour $x = \sqrt{3}/3, 1, \sqrt{3}$).

PROBLEME 2:

L'objet de ce problème est de montrer que, si une fonction f définie au voisinage de 0 vérifie H_n :

i) f admet un D.L. à l'ordre n en 0.

ii) f est strictement monotone au voisinage de 0, nulle en 0.

iii) $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ avec $a_1 \neq 0$.

alors, la fonction g réciproque de f , définie dans un voisinage de 0 admet un D.L. à l'ordre n au voisinage de 0.

1°). Ici, $n = 3$: $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$

et $g(y) = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + o(y^3)$. ($g = f^{-1}$)