

EXERCICE 1: Moyennes

Soit $(a_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, si $r \in \mathbb{R}^*$, on définit $M_r(a) = \left[\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i^r \right) \right]^{1/r}$.

1°). Prolonger par continuité en 0 la fonction $M_r(a)$ (On écrira $a_i^r = e^{r \ln a_i} = 1 + r \ln a_i + o(r)$). En utilisant la fonction logarithme, montrer que : $\forall r > 0, M_r(a) \geq M_0(a)$.

2°). Calculer $\lim_{r \rightarrow +\infty} M_r(a)$ et $\lim_{r \rightarrow -\infty} M_r(a)$

3°) On rappelle la formule : $(a^x)' = a^x \ln a$. Montrer que la fonction $y \ln y$ est convexe, en déduire, à l'aide de la dérivée logarithmique que : $M_r(a)$ est croissante.

4°) En utilisant l'inégalité $M_0(a) \leq M_1(a)$ démontrer :

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n b_i \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \right)^{1/n} \text{ où } (a_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \text{ et } (b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n.$$

EXERCICE 2: Fonctions Arc (2 exercices indépendants).

1°) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $a > b > 0$, on pose $f(x) = \operatorname{Arccos}(ax) - \operatorname{Arcsin}(bx)$.

a) Préciser le domaine de définition D_f de f et montrer que sur D_f , f admet une fonction réciproque notée g .

b) Calculer $\sin y$, $\cos y$ et $\left(\frac{\sin y}{x} \right)^2$, en déduire l'expression de g .

2°) Soit $h(x) = \operatorname{Arccos} \left(\frac{\sqrt{3}+1+2x(\sqrt{3}-1)-x^2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(1+x^2)} \right)$

a) Montrer que h est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer h' et simplifier l'expression obtenue.

c) En déduire une expression plus simple pour h .

PROBLEME.

I. Soit $A \in M_6(\mathbb{R})$ vérifiant (P) : $a_{ij} = a_{ji} = a_{5-i, 5-j}$

On pose : $\Delta_1 = a_{11} + a_{44}$, $\Delta_2 = a_{12} + a_{33}$, $\Delta_3 = a_{22} + a_{23}$, $\Delta_4 = a_{11} + a_{22}$, $\Delta_5 = a_{14} + a_{23}$
 $(R) \begin{cases} p_1 = 2a_{11}a_{44}, p_2 = 2a_{12}a_{33}, p_3 = 2a_{22}a_{23}, q_e = \Delta_e^2 - p_e \quad e \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$

a) Montrer que les six nombres a_{ij} qui interviennent dans (R) caractérisent totalement la matrice A (écrire la matrice A avec ces 6 éléments).

b) Montrer que la matrice $B = A^2$ vérifie (P)