

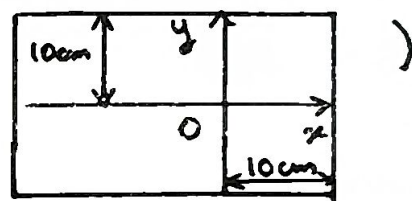
EXERCICES :

1°. Chercher les D.L. en 0 de :

a) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x}{\lg x}}\right)$ ordre 4

b) $g(x) = \frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$ ordre 2

c) $h(x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$ ordre $n+1$

2°. Etudier la fonction $f(x) = x^2 \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2}$ (On étudiera le signe de la dérivée et on précisera les branches infinies).Tracer la portion de courbe correspondant à $x < 1$ (On prendra $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 10 \text{ cm}$ et on adoptera la disposition :PROBLEME :I Soit f une fonction impaire de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.1°) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 sur $[0, x]$.2°) Montrer d'autre part que l'on peut associer à f au moins unefonction θ telle que
$$\textcircled{1} : \begin{cases} f(x) = x f'(x) \cdot \theta(x) \\ \theta(x) \in]0, 1[\end{cases}$$
3°) On suppose en outre $f'''(0) \neq 0$. Déterminer, pour une telle fonction θ , la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers 0.II On pose $f(x) = \text{Arctg } x$ 1°) Etablir l'unicité de la fonction θ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \textcircled{1} \text{ si } x \neq 0 \\ \theta(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) \text{ pour } x = 0. \end{cases}$$

Pour cela, on explicitera la fonction $\theta(x)$.Montrer, en considérant la formule obtenue, que θ est paire.2°) Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que θ admet au voisinage de 0 un D.L. à l'ordre n . Ecrire ce D.L. pour $n = 5$; retrouver la valeur de $\theta(0)$.